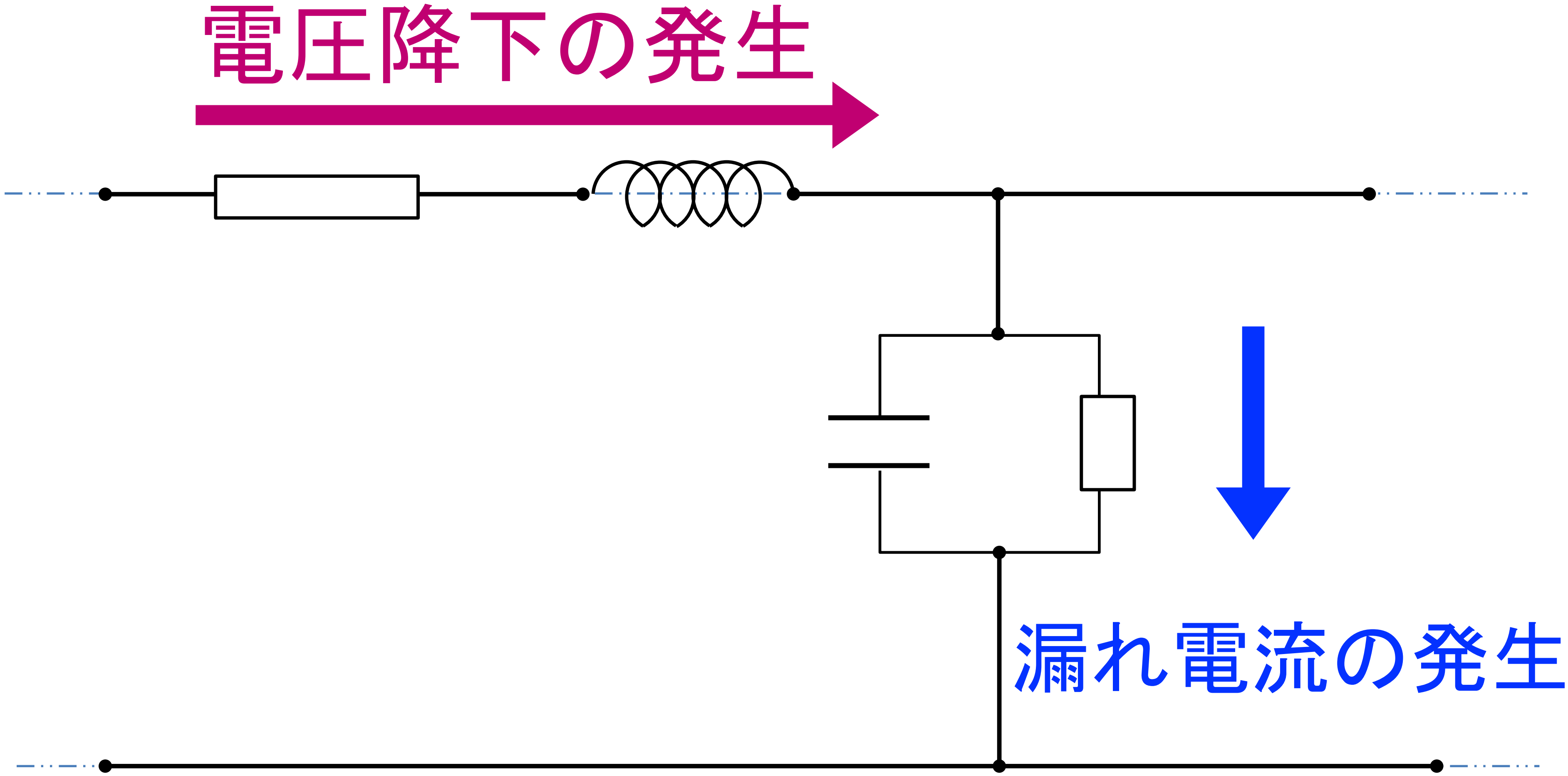
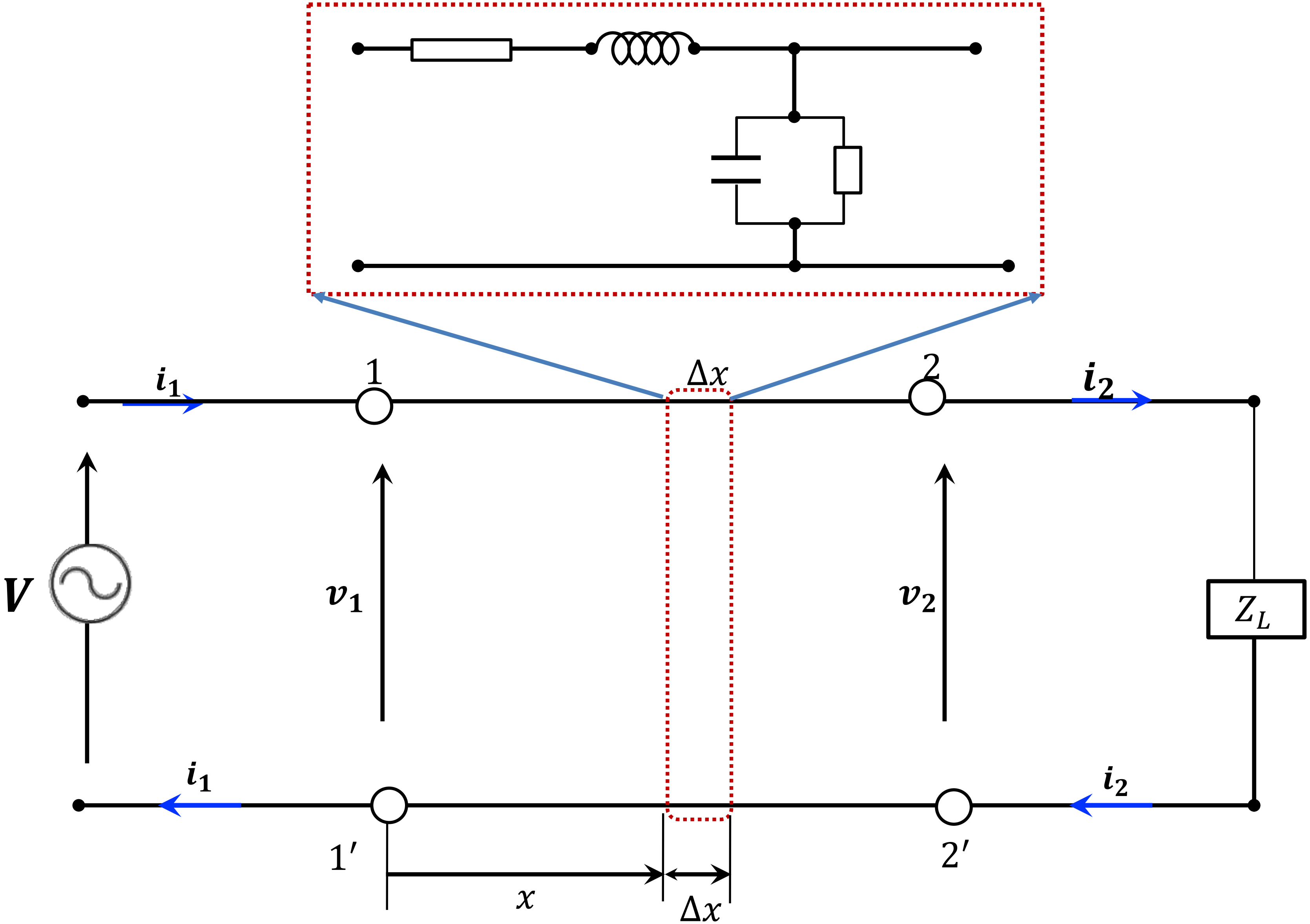
分布定数回路の基礎方程式の導出



微小距離部分の素子要素

分布定数回路の基礎方程式の導出



分布定数回路における素子値の定義

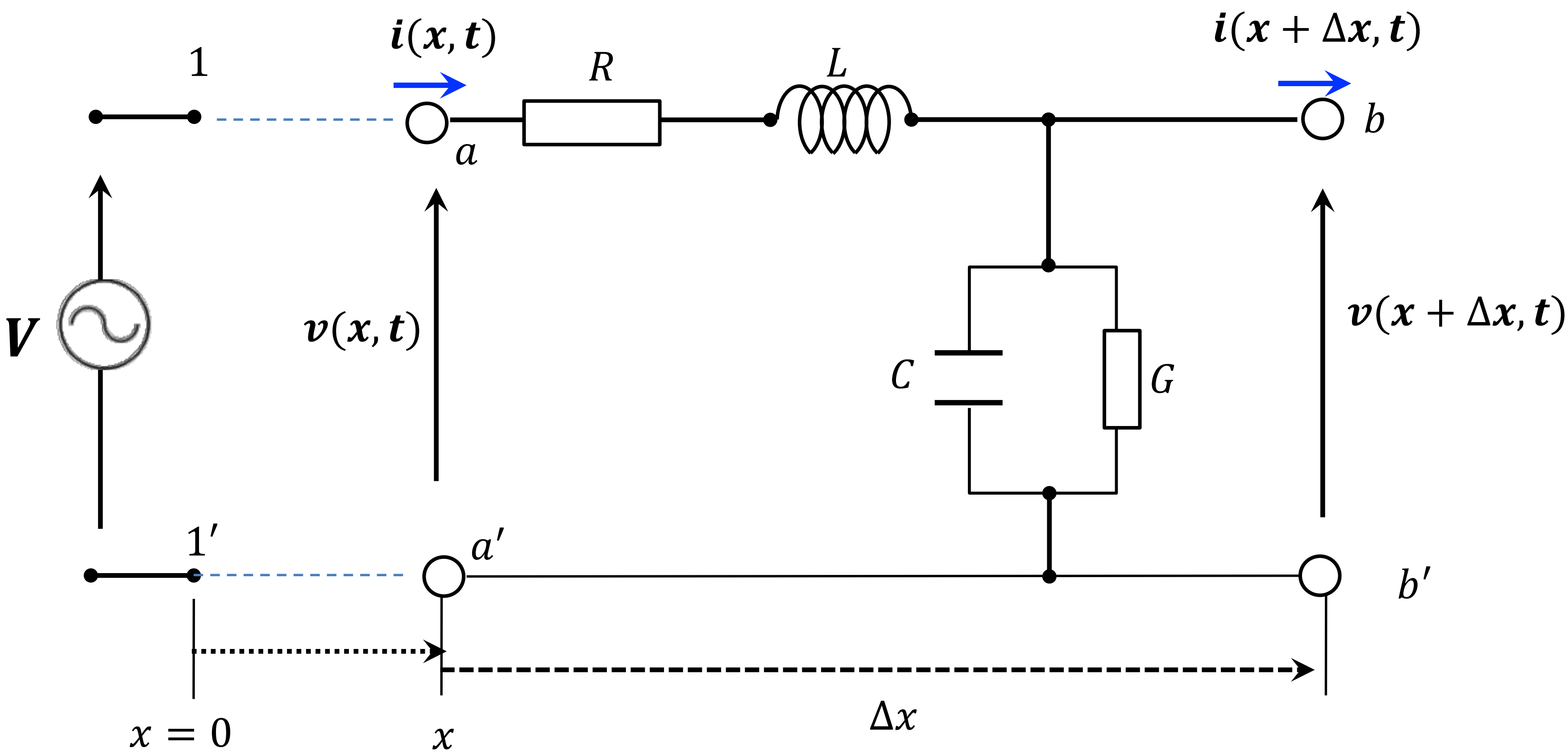
$R\ [\Omega/m]$: 単位長さあたりの線路の抵抗

$L\ [H/m]$: 単位長さあたりの線路のインダクタンス

$G\ [S/m]$: 単位長さあたりの線路間の漏れコンダクタンス

$C\ [F/m]$: 単位長さあたりの線路間のキャパシタンス

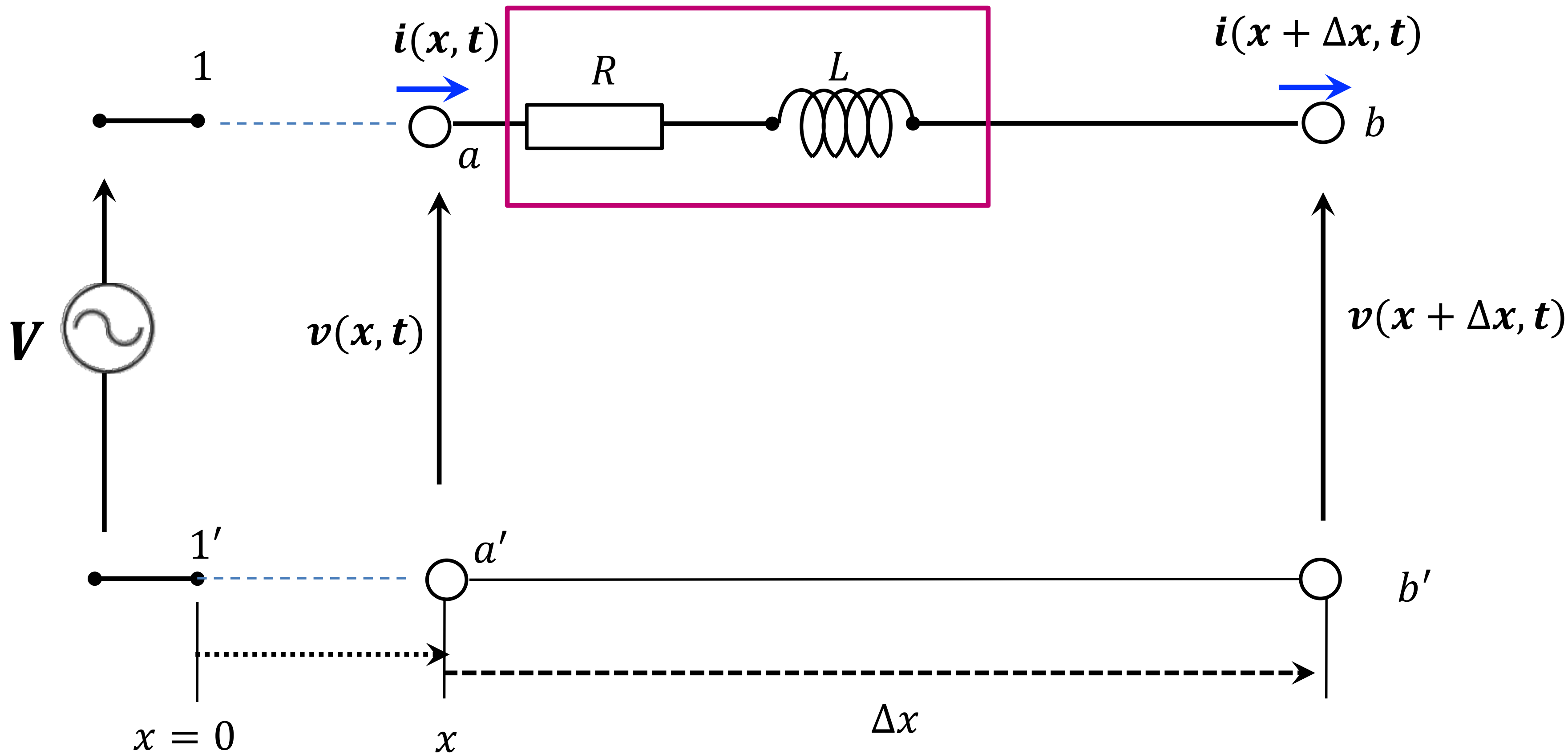
分布定数回路の基礎方程式の導出



各素子のインピーダンス：

$$R\Delta x \qquad L\Delta x \qquad G\Delta x \qquad C\Delta x$$

分布定数回路の基礎方程式の導出: 電圧降下



電圧降下の計算

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{x})\cdot i(x,t) + (L\Delta\boldsymbol{x})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{t}}$$

分布定数回路における電圧を支配する方程式:

$\boldsymbol{v(x+\Delta x,t)}$ をΔxについてテイラー展開し、その一次項までを取ると

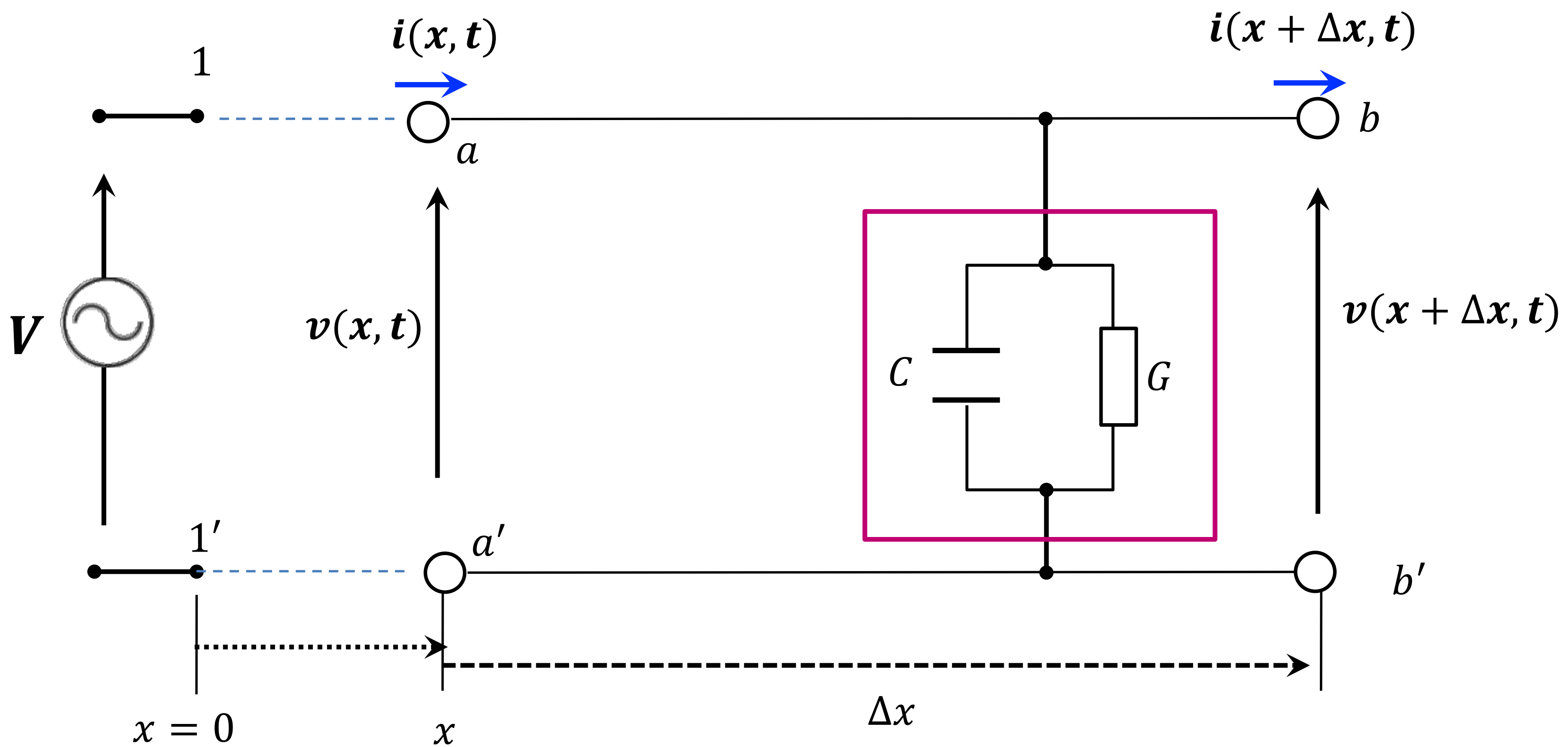
$$v(x+\Delta x,t)=v(x,t)+\Delta x\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

$$v(x,t)-v(x+\Delta x,t)=(R\Delta x)\cdot i(x,t)+(L\Delta x)\cdot\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$-\Delta x\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=(R\Delta x)\cdot i(x,t)+(L\Delta x)\cdot\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=R\cdot i(x,t)+L\cdot\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

分布定数回路の基礎方程式の導出:　漏れ電流



漏れ電流の計算

$$\boldsymbol{i(x,t) - i(x+\Delta x,t) = (G\Delta x)} \cdot v(x,t) + \boldsymbol{(C\Delta x)} \cdot \boldsymbol{\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}}$$

分布定数回路における電流を支配する方程式:

$\boldsymbol{i(x+\Delta x, t)}$ をΔxについてテイラー展開し、その一次項までを取ると

$$i(x+\Delta x, t) = i(x,t) + \Delta x \frac{\boldsymbol{\partial i(x,t)}}{\boldsymbol{\partial x}}$$

$$\boldsymbol{i(x,t)} - \boldsymbol{i(x+\Delta x, t)} = (\boldsymbol{G\Delta x}) \cdot v(x,t) + (\boldsymbol{C\Delta x}) \cdot \frac{\boldsymbol{\partial v(x,t)}}{\boldsymbol{\partial t}}$$

$$-\Delta x \frac{\boldsymbol{\partial i(x,t)}}{\boldsymbol{\partial x}} = (\boldsymbol{G\Delta x}) \cdot v(x,t) + (\boldsymbol{C\Delta x}) \cdot \frac{\boldsymbol{\partial v(x,t)}}{\boldsymbol{\partial t}}$$

$$-\frac{\boldsymbol{\partial i(x,t)}}{\boldsymbol{\partial x}} = G \cdot i(x,t) + \boldsymbol{C} \cdot \frac{\boldsymbol{\partial i(x,t)}}{\boldsymbol{\partial t}}$$

分布定数回路の基礎方程式

$$-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = R \cdot i(x,t) + L \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -Ri - L\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G \cdot v(x,t) + C \cdot \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -Gv - C\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -Ri - L\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -R\frac{\partial i}{\partial x} - L\frac{\partial \partial i}{\partial t \partial x}$$

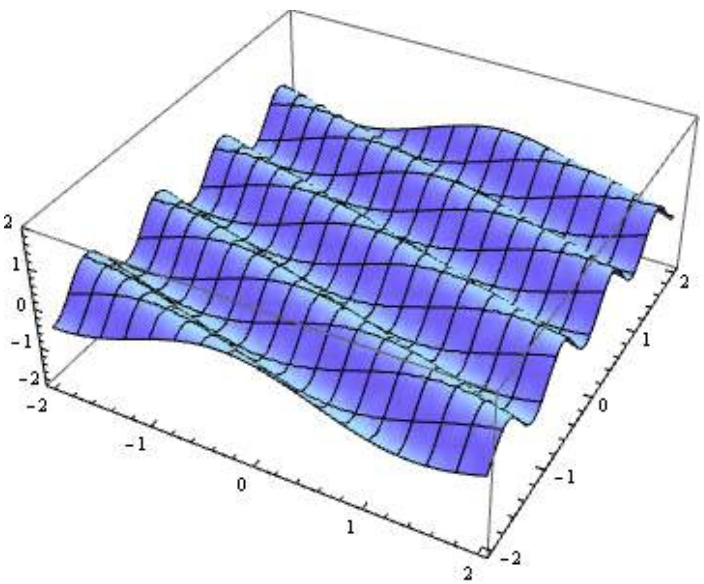
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -R(-Gv - C\frac{\partial v}{\partial t}) - L\frac{\partial}{\partial t}(-Gv - C\frac{\partial v}{\partial t})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (GL + RC)\frac{\partial v}{\partial t} + RGv$$

電信方程式

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (GL + RC)\frac{\partial v}{\partial t} + RGv$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (GL + RC)\frac{\partial i}{\partial t} + RGi$$



- 1次元の波動方程式

$$\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

基礎方程式の複素数表示

$$v(x,t) = V(x)e^{j(wt+\theta)} \quad i(x,t) = I(x)e^{j(wt+\phi)}$$

$V(x)$:電圧の実効値　　$I(x)$:電流の実効値

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -Ri - L\frac{\partial i}{\partial t} \qquad \frac{\partial i}{\partial x} = -Gv - C\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$-Ri - L\frac{\partial i}{\partial t} = -RI(x)e^{j(wt+\phi)} - LjwI(x)e^{j(wt+\phi)}$$

$$= -(R + jwL)I(x)e^{j(wt+\phi)}$$

$$v(x,t) = V(x)e^{j(wt+\theta)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} e^{j(wt+\theta)}$$

$$-Ri - L\frac{\partial i}{\partial t} = -(R + jwL)I(x)e^{j(wt+\phi)}$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \cancel{e^{j(wt+\theta)}} = -(R + jwL)I(x)\cancel{e^{j(wt+\phi)}}$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -(R + jwL)I(x)$$

$$-Gv - C\frac{\partial v}{\partial t} = -GV(x)e^{j(wt+\theta)} - CjwV(x)e^{j(wt+\theta)}$$

$$= -(G + jwC)V(x)e^{j(wt+\theta)}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial I(x)}{\partial x}e^{j(wt+\phi)}$$

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x}\cancel{e^{j(wt+\phi)}} = -(G + jwC)V(x)\cancel{e^{j(wt+\theta)}}$$

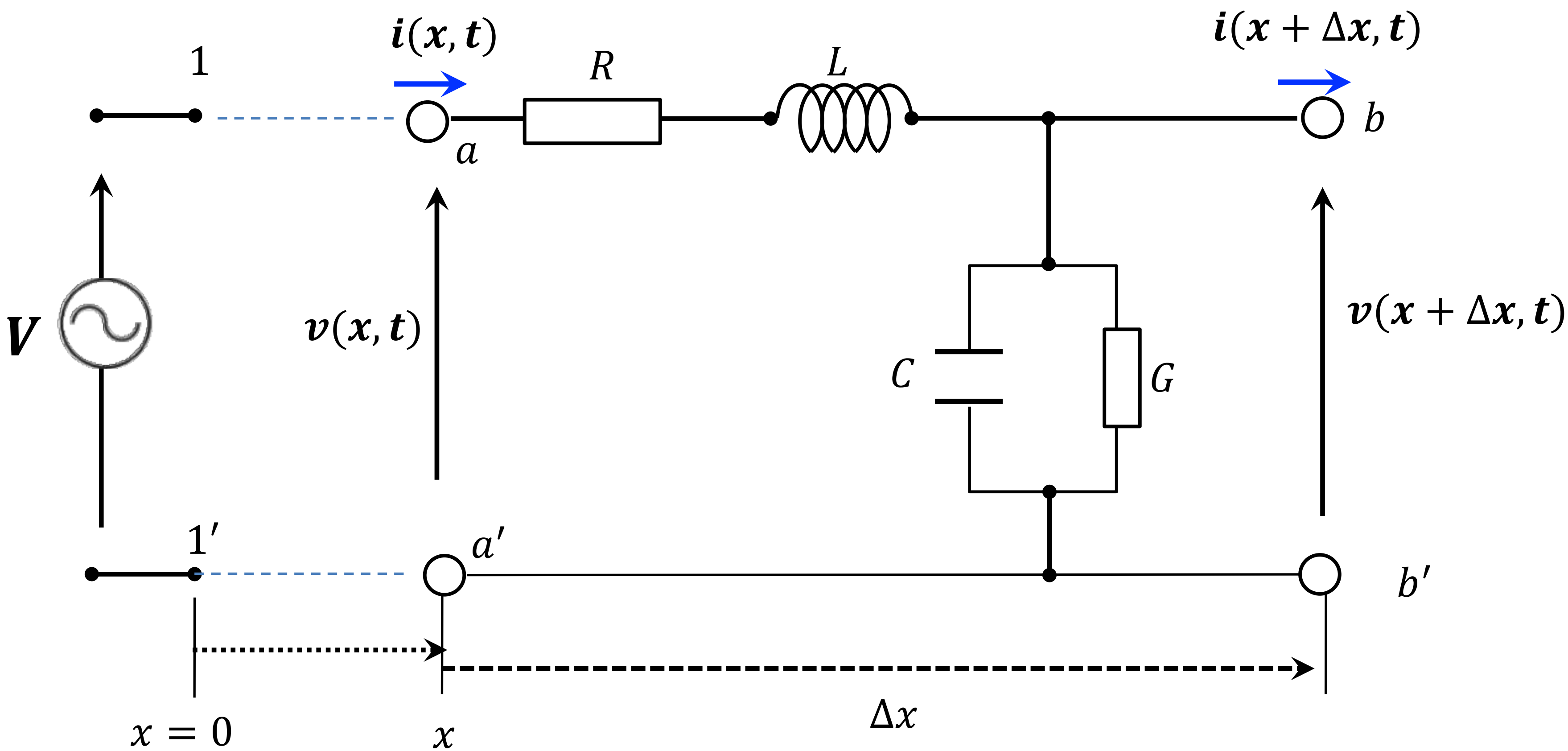
$$\frac{dI(x)}{dx} = -(G + jwC)V(x)$$

伝送線路方程式:

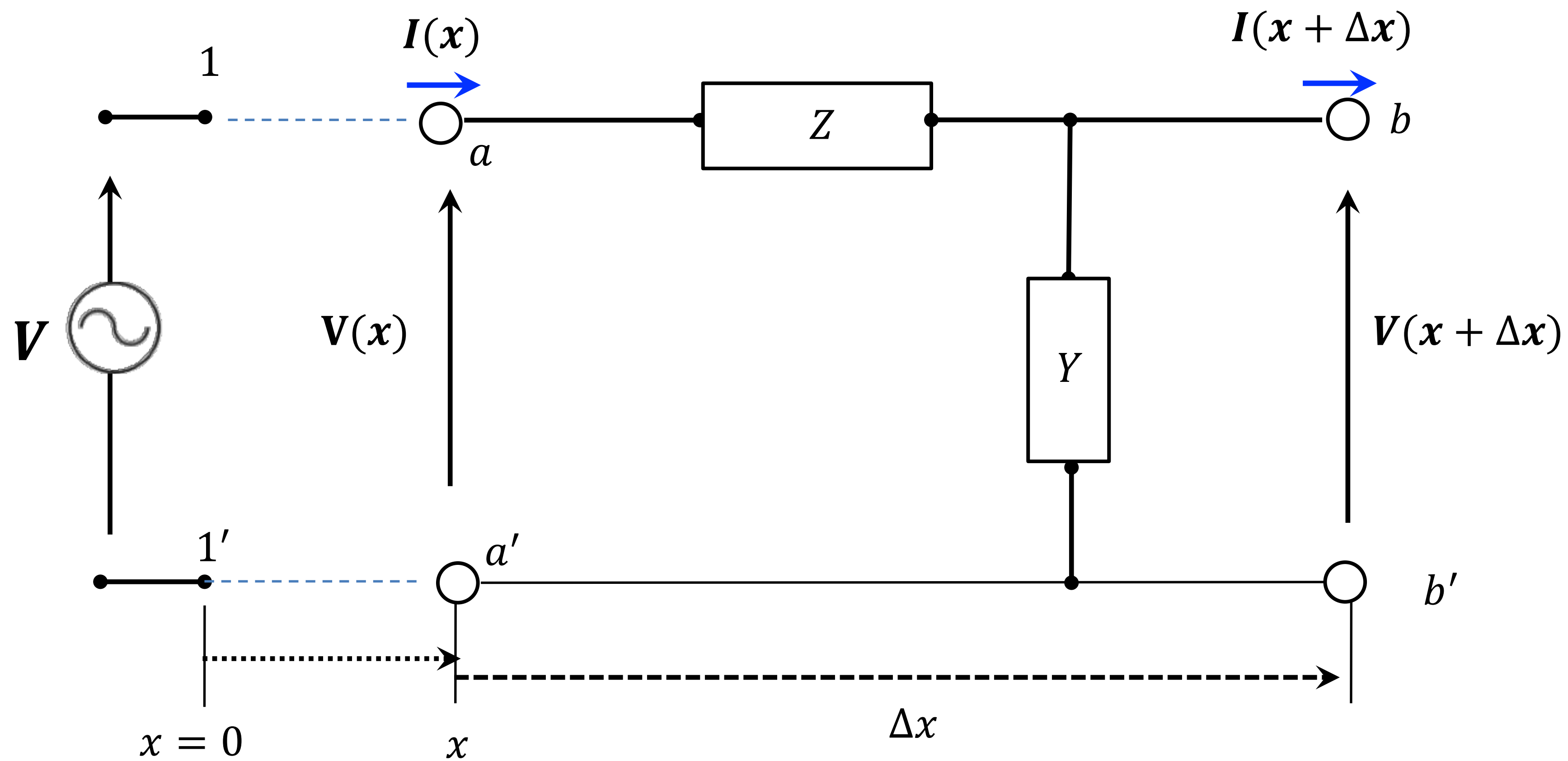
$$Z = R + \boldsymbol{jwL} \qquad Y = G + \boldsymbol{jwC}$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -ZI(x)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = -YV(x)$$


$i(x,t)$
$i(x+\Delta x,t)$
1
R
L
a
b
V
$v(x,t)$
C
G
$v(x+\Delta x,t)$
$1'$
a'
b'
$x=0$
x
Δx

分布定数回路の等価回路



$$\frac{dV(x)}{dx} = -ZI(x) \qquad \frac{dI(x)}{dx} = -YV(x)$$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -Z\frac{dI(x)}{dx} = ZY\ V(x)$$

$$\frac{d^2I(x)}{dx^2} = -Z\frac{dV(x)}{dx} = ZY\ I(x)$$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = ZY\ V(x) \qquad \frac{d^2I(x)}{dx^2} = ZY\ I(x)$$

$$Z = R + jwL \qquad Y = G + jwC$$

$$ZY = (R + jwL)(G + jwC)$$

伝送線路の波動方程式と伝搬係数γ

電圧と電流は伝送線路上を波として伝わり、次の波動方程式で表される

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = ZY\ V(x) \qquad \frac{d^2I(x)}{dx^2} = ZY\ I(x)$$

$$ZY = \gamma^2 \qquad \gamma^2 = (R + jwL)(G + jwC)$$

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + jwL)(G + jwC)}$$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \gamma^2 V(x) \qquad \frac{d^2I(x)}{dx^2} = \gamma^2 I(x)$$

波動方程式の一般解:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \gamma^2\, V(x) \qquad \frac{d^2I(x)}{dx^2} = \gamma^2\, I(x)$$

$$V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$$

$$I(x) = De^{-\gamma x} + Ee^{\gamma x}$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -Z\ I(x)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\gamma A e^{-\gamma x} + \gamma B e^{\gamma x}$$

$$-ZI(x) = -Z\{De^{-\gamma x} + Ee^{\gamma x}\}$$

$$-\gamma A e^{-\gamma x} + \gamma B e^{\gamma x} = -ZDe^{-\gamma x} - ZEe^{\gamma x}$$

$$\gamma A = ZD \qquad \gamma B = -ZE$$

$$\gamma A = ZD$$

$$D = \frac{\gamma}{Z} A = \frac{\sqrt{ZY}}{Z} A = \frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{Z}} A$$

$$\gamma B = -ZE$$

$$E = -\frac{\gamma}{Z} B = -\frac{\sqrt{ZY}}{Z} B = -\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{Z}} B$$

伝送線路波動方程式の一般解:

電圧波

$$V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$$

電流波

$$I(x) = \sqrt{\frac{Y}{Z}}Ae^{-\gamma x} - \sqrt{\frac{Y}{Z}}Be^{\gamma x}$$

伝送線路の特性インピーダンス: Z_0

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x})$$

Z_0:特性インピーダンス(Ω)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + jwL}{G + jwC}}$$

例題:

ある伝送線路において、単位長さあたりの線路の抵抗が$\boldsymbol{R = 1.0[\Omega/m]}$, インダクタンスが$\boldsymbol{L = 2.0[mH/m]}$,漏れコンダクタンス $\boldsymbol{G = 0.5[S/m]}$, キャパシタンスが$\boldsymbol{C = 300[\mu F/m]}$とする。周波数が$\boldsymbol{50[Hz]}$であるとき、単位長さあたりの直列インピーダンス$\boldsymbol{Z}$と並列アドミタンス$Y$,特性インピーダンス$\boldsymbol{Z_0}$,および伝搬定数$\boldsymbol{\gamma}$を求めよ。

$$\boldsymbol{Z_0 = \sqrt{\frac{R + jwL}{G + jwC}}}$$

伝搬定数γの複素数表現:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

ここで、αは減衰定数、βは位相定数という

αの単位: $[\mathrm{Np/m}]$ Np : ネーパ　　βの単位: $[\mathrm{rad/m}]$

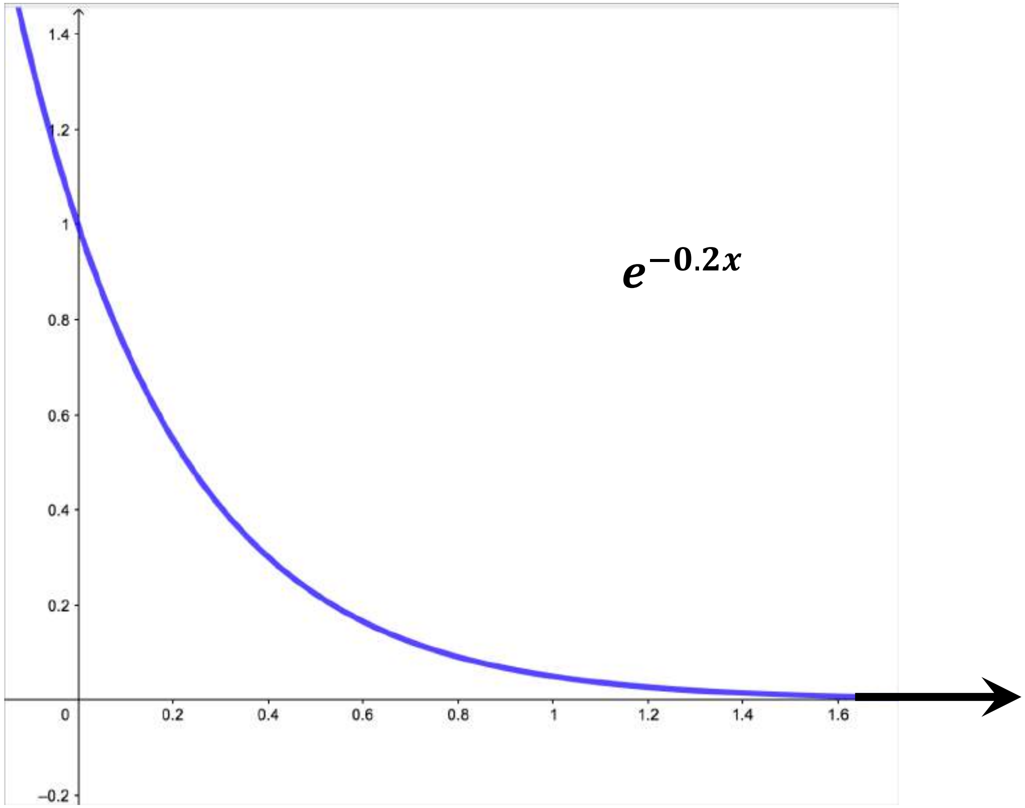
入射波　$Ae^{-\gamma x} = Ae^{-\alpha x}\, e^{-j\beta x}$

反射波　$Be^{\gamma x} = Be^{\alpha x}\, e^{j\beta x}$

入射波における減衰定数α

$$Ae^{-\alpha x}$$

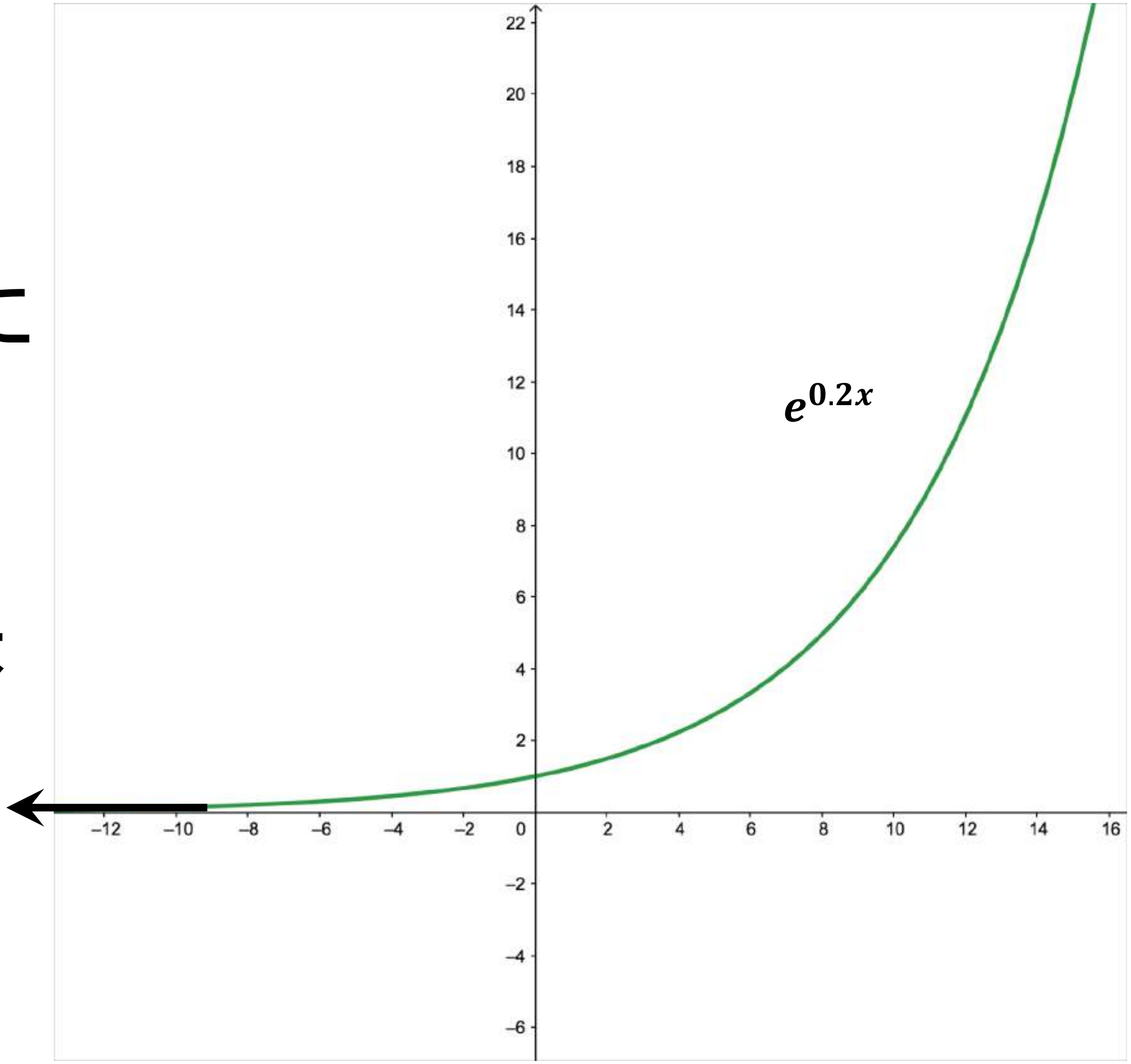
xの正の方向に進行するに指数関数的に減衰することを示しています



反射波における減衰定数α

$$Be^{\alpha x}$$

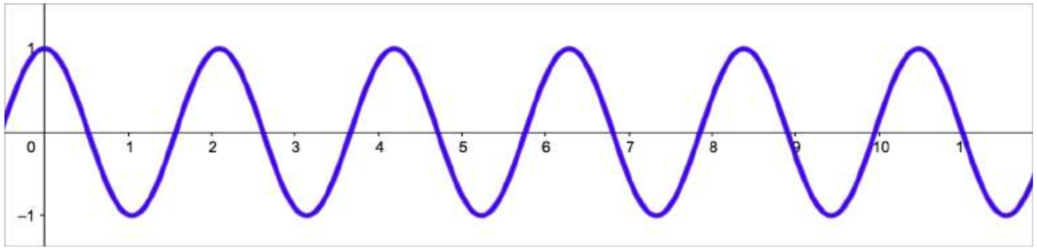
xの負の方向に進行するに指数関数的に減衰することを示しています



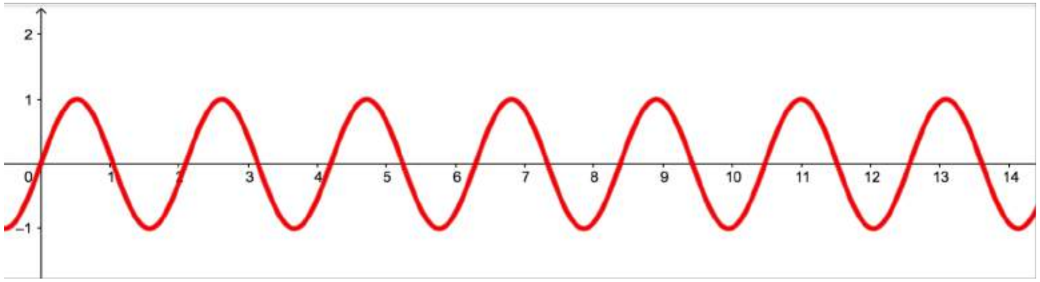
振動項: $e^{-j\beta x}$

$$e^{-j\beta x} = cos\beta x - jsin\beta x$$

$Re(e^{-j\beta x}) = cos\beta x$

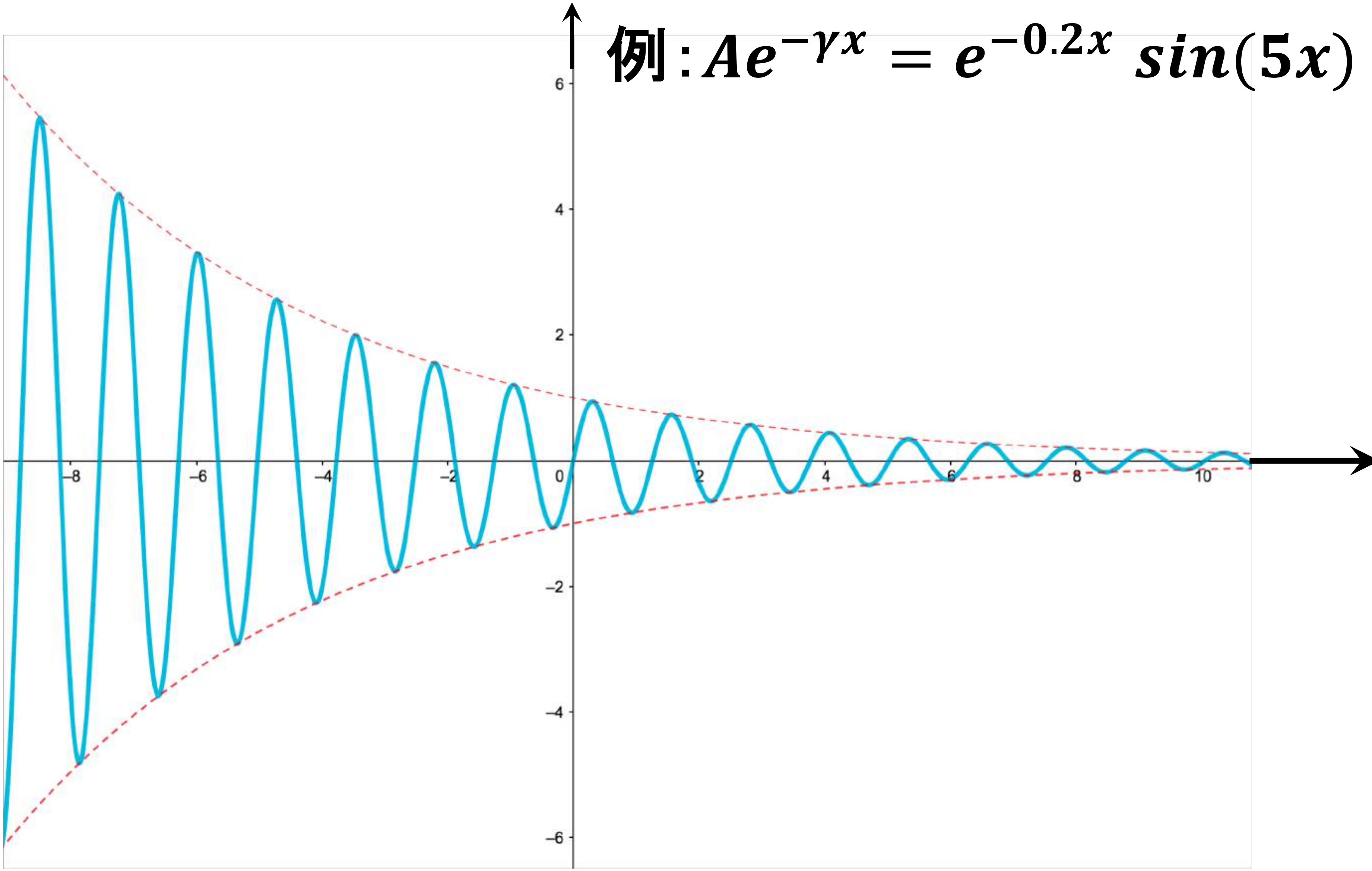


$Im(e^{-j\beta x}) = sin\beta x$



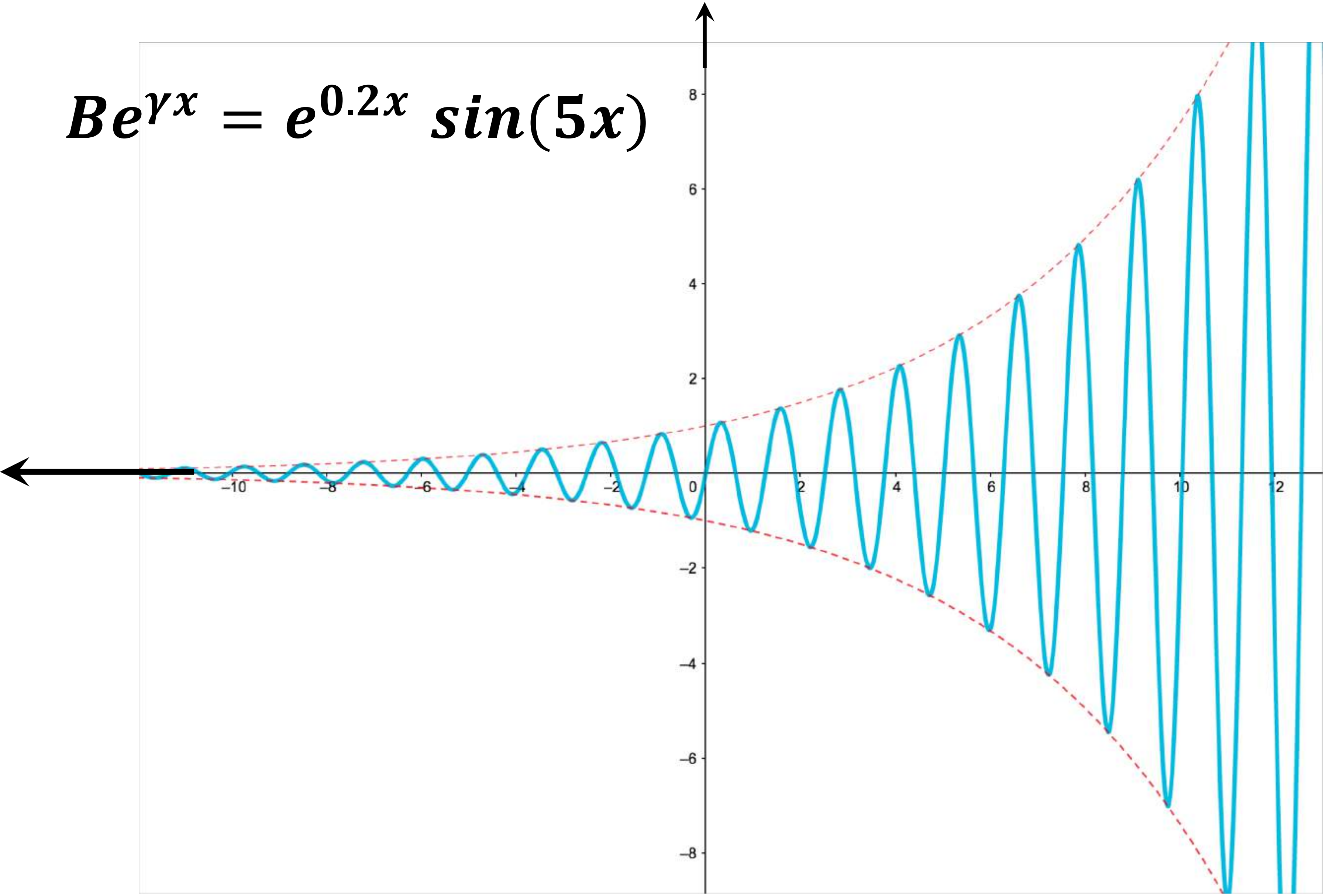
減衰する入射波:　$Ae^{-\gamma x} = Ae^{-\alpha x}\ e^{-j\beta x}$

例: $Ae^{-\gamma x} = e^{-0.2x}\ sin(5x)$



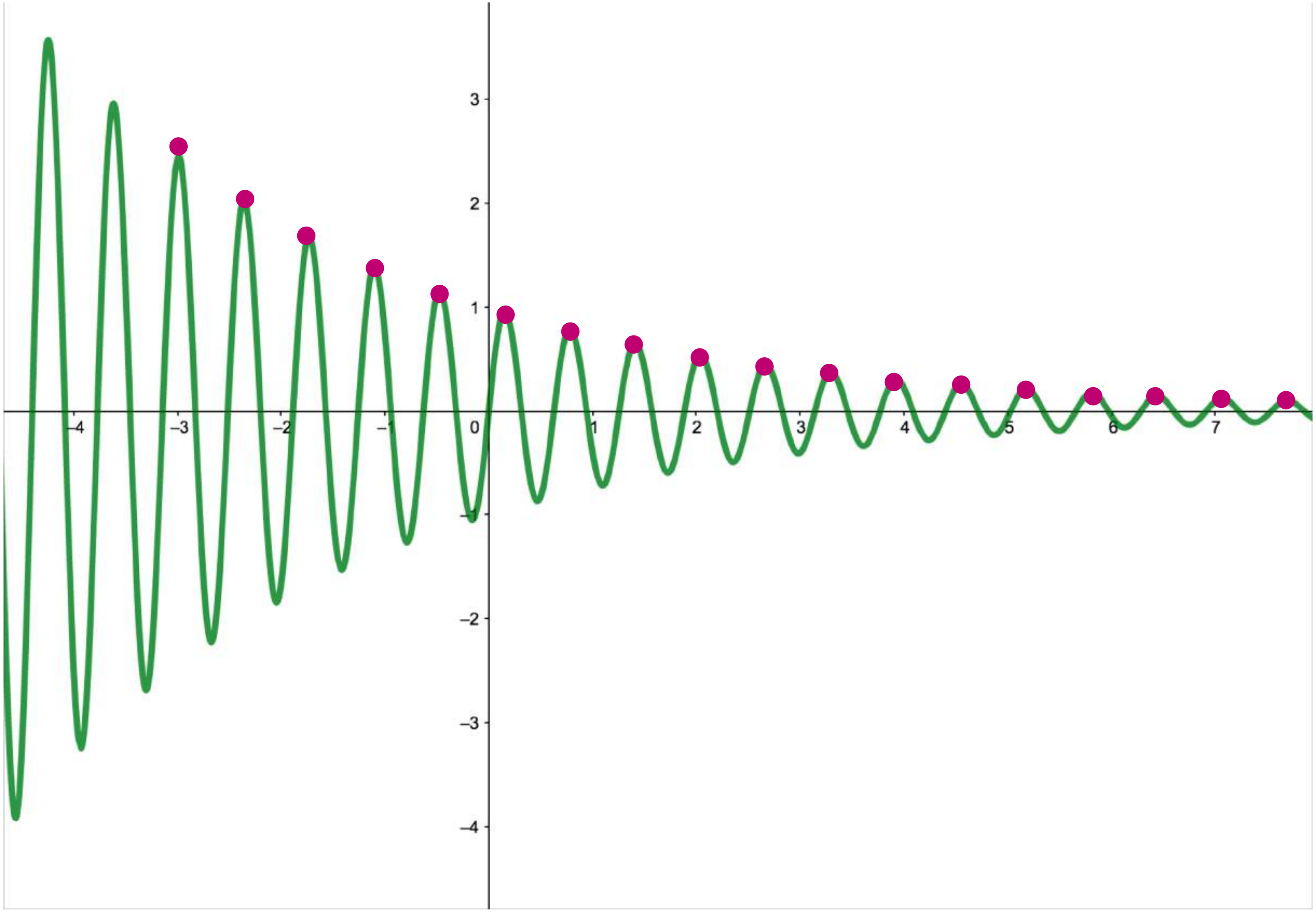
減衰する反射波　$Be^{\gamma x} = Be^{\alpha x}\ e^{j\beta x}$

$$Be^{\gamma x} = e^{0.2x}\ sin(5x)$$



伝送位相速度を求める

位相速度:位相が一定の点、どのような速度で移動する



伝送線路方程式の瞬時値表現

$$Ae^{-\gamma x} = Ae^{-\alpha x}\ e^{-j\beta x}$$

$$Ae^{-\gamma x} = \sqrt{2}Ae^{-\alpha x}\ e^{-j\beta x}e^{jwt}$$

$$\mathrm{v} = \mathrm{Im}(Ae^{-\gamma x})$$

$$\mathrm{v} = \sqrt{2}Ae^{-\alpha x}sin(wt - \beta x)$$

$wt - \beta x$は位相を表す

位相速度$\boldsymbol{v}$

位相：$wt-\beta x$が一定の場所

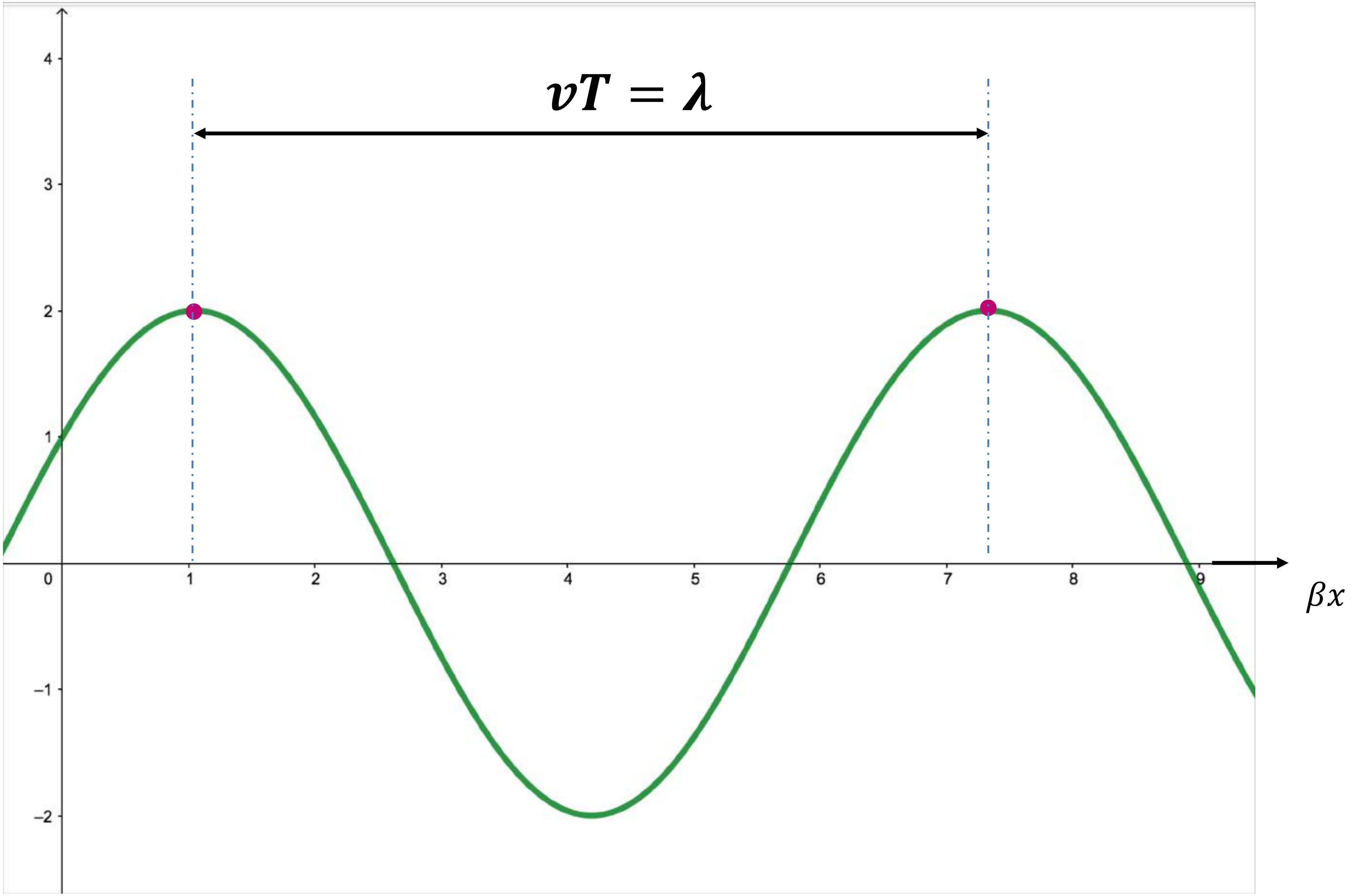
$$wt-\beta x=定数$$

$$\frac{d}{dt}(wt-\beta x)=0$$

$$w-\beta\frac{dx}{dt}=0$$

位相速度：$v=\frac{dx}{dt}$を定義します

$$位相速度:\quad \boldsymbol{v=\frac{dx}{dt}=\frac{w}{\beta}}$$


$vT = \lambda$
4
3
2
1
0
−1
−2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
βx

伝送線路上の波の波長

$$vT = \lambda \qquad \frac{w}{\beta}T = \lambda \qquad w = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{2\pi}{T}\frac{1}{\beta}T = \lambda$$

$$\frac{2\pi}{\beta} = \lambda$$

伝送線路上を電圧波が光速$c=3\times 10^8[\boldsymbol{m/s}]$で伝搬すると仮定する。この電圧波の周波数が、$f_1=300[MHz]$の場合と、$f_2=300[Hz]$の場合について、波長と位相定数を計算せよ。二つの周波数に対する位相定数の計算結果を用いて、線路長0.5mの伝送線に対する位相変化量を比較せよ。これから、伝送線路を分布定数回路として扱う必要性と周波数の関係を説明せよ。

$$f_1 = 300[MHz]、f_2 = 300[Hz]$$

$$\lambda_1 = c * T = \frac{c}{f_1} = \frac{3\times 10^8}{3\times 10^8} = 1[m]$$

$$\lambda_1 = c * T = \frac{c}{f_2} = \frac{3\times 10^8}{3\times 100} = 1\times 10^6[m] = 1000[km]$$

位相定数$\boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\lambda}_1} = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}[\boldsymbol{rad}/\boldsymbol{m}]$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\lambda}_2} = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\times 10^{-6}[\boldsymbol{rad}/\boldsymbol{m}]$$

線路長$: x = 0.\mathbf{5}\boldsymbol{m}$

位相変化$: \boldsymbol{\beta}x$

$$f_1 = 300[MHz]$$

$$\boldsymbol{\beta}_1 x = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi} * \mathbf{0.5} = \boldsymbol{\pi}[\boldsymbol{rad}]$$

位相変化量は無視できない

$$f_2 = 300[Hz]$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 x = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\times 10^{-6} * \mathbf{0.5} = \boldsymbol{\pi}\times 10^{-6}[\boldsymbol{rad}]$$

位相変化量は無視できる

周波数が高くなるほど、分布定数
回路としての扱いが必要となる

αとβの導出

$$\boldsymbol{\gamma = \alpha + j\beta}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \sqrt{\boldsymbol{ZY}} = \sqrt{(R + \boldsymbol{jwL})(G + \boldsymbol{jwC})}$$

$$\boldsymbol{\alpha + j\beta} = \sqrt{(R + \boldsymbol{jwL})(G + \boldsymbol{jwC})}$$

$$(\alpha + j\beta)^2 = (R + jwL)(G + jwC)$$

$$(\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta$$

$$(R + jwL)(G + jwC)$$
$$= RG - w^2LC + j(wLG + wCR)$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - w^2LC$$

$$2\alpha\beta = wLG + wCR$$

$$\beta = \frac{wLG + wCR}{2\alpha}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - w^2LC$$

$$\alpha^2 - (\frac{wLG + wCR}{2\alpha})^2 = RG - w^2LC$$

$$\alpha^4 - \left(RG - w^2LC\right)\alpha^2 - \frac{(wLG + wCR)^2}{4} = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{\left(RG - w^2LC\right) \mp \sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2}}{2}$$

$$\alpha^2 = \frac{\left(RG - w^2LC\right) + \sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2}}{2}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(RG - w^2LC) + \sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2}}{2}}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - w^2LC$$

$$\frac{\left(RG - w^2LC\right) + \sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2}}{2} - \beta^2 = RG - w^2LC$$

$$\beta^2 = \frac{\left(RG - w^2LC\right) + \sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2}}{2} - (RG - w^2LC)$$

$$\beta^2 = \frac{-\left(RG - w^2LC\right) + \sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2}}{2}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2} - (RG - w^2LC)}{2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(RG - w^2LC) + \sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2}}{2}}$$

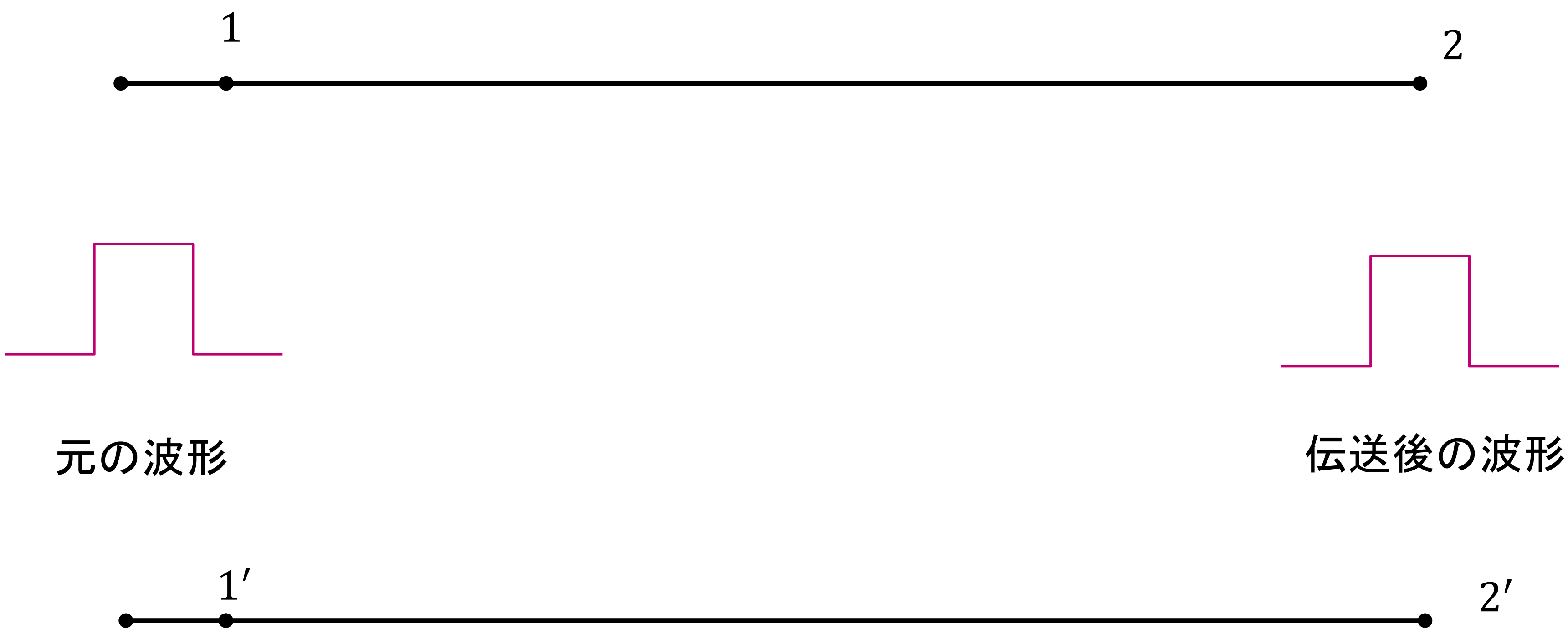
$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2} - (RG - w^2LC)}{2}}$$

単位長さあたりの直列インピーダンスが$Z = 0.08 + j0.06[\Omega/\boldsymbol{m}]$,
並列アドミタンス $Y = j2.0\times10^{-4}[\boldsymbol{s}/\boldsymbol{m}]$ の伝送線路がある。このとき、
特性インピーダンス$\boldsymbol{Z_0}$ 、伝搬定数$\boldsymbol{\gamma}$、減衰定数$\boldsymbol{\alpha}$と位相定数$\boldsymbol{\beta}$を求めよ。

$$\boldsymbol{\alpha = \sqrt{\frac{(RG - w^2LC) + \sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2}}{2}}}$$

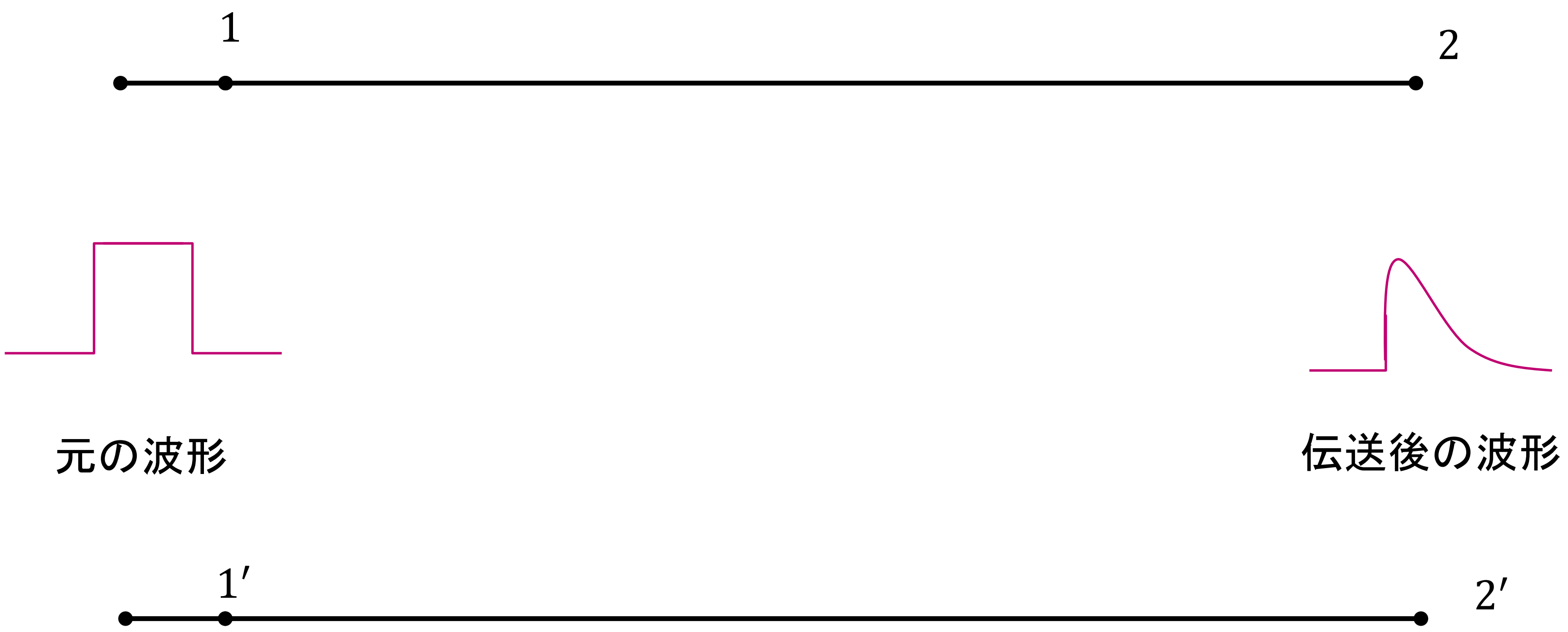
$$\boldsymbol{\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2} - (RG - w^2LC)}{2}}}$$

無ひずみ伝送:



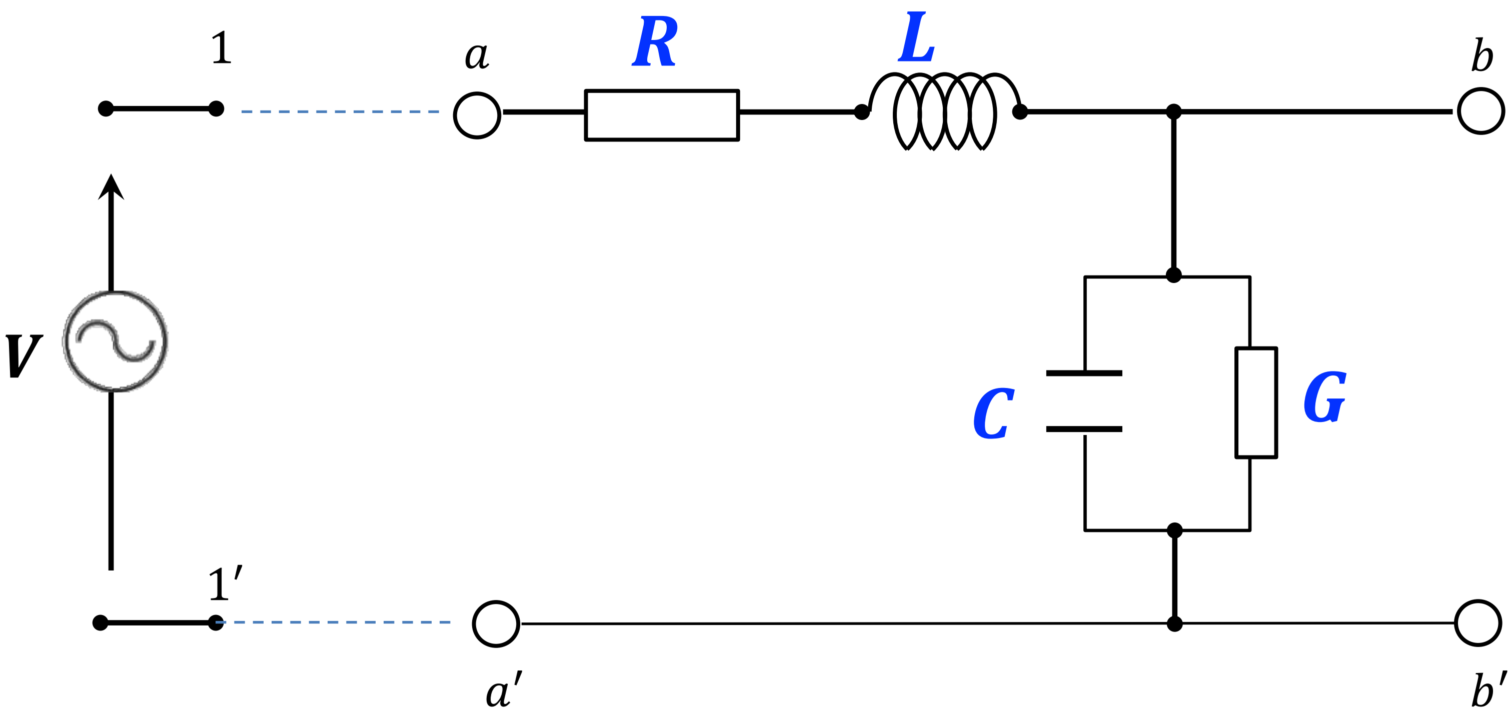
無ひずみ伝送線路

無ひずみ伝送:



ひずみのある一般の伝送線路

無ひずみ伝送条件:



無ひずみ伝送条件　$CR = LG$

$$CR = LG$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(RG - w^2LC) + \sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2}}{2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(RG - w^2LC) + \sqrt{(RG - w^2LC)^2 + 4w^2L^2G^2}}{2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(RG - w^2LC) + \sqrt{R^2G^2 + w^4L^2C^2 - 2w^2RGLC + 4w^2L^2G^2}}{2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(RG - w^2LC) + \sqrt{R^2G^2 + w^4L^2C^2 + 2w^2L^2G^2}}{2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(RG - w^2LC) + \sqrt{R^2G^2 + w^4L^2C^2 + 2w^2LGCR}}{2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(RG - w^2LC) + \sqrt{(RG + w^2LC)^2}}{2}}$$

$$\alpha = \sqrt{RG}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{RG - w^2LC + RG + w^2LC}{2}} = \sqrt{\frac{2RG}{2}}$$

$$CR = LG$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2} - (RG - w^2LC)}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{RG + w^2LC - (RG - w^2LC)}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2w^2LC}{2}}$$

$$\beta = w\sqrt{LC}$$

位相速度 : $v = \frac{dx}{dt} = \frac{w}{\beta}$

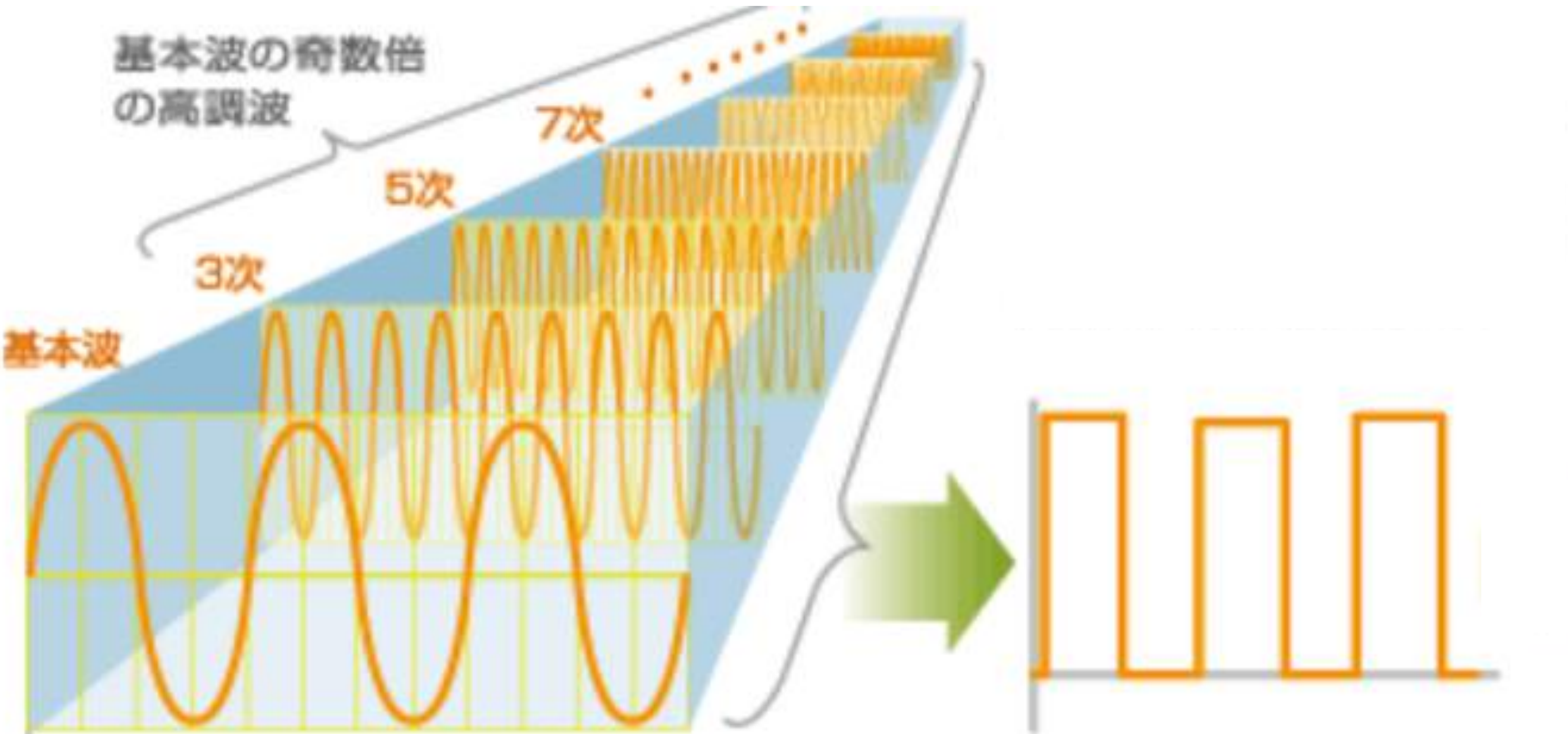
$\beta = w\sqrt{LC}$

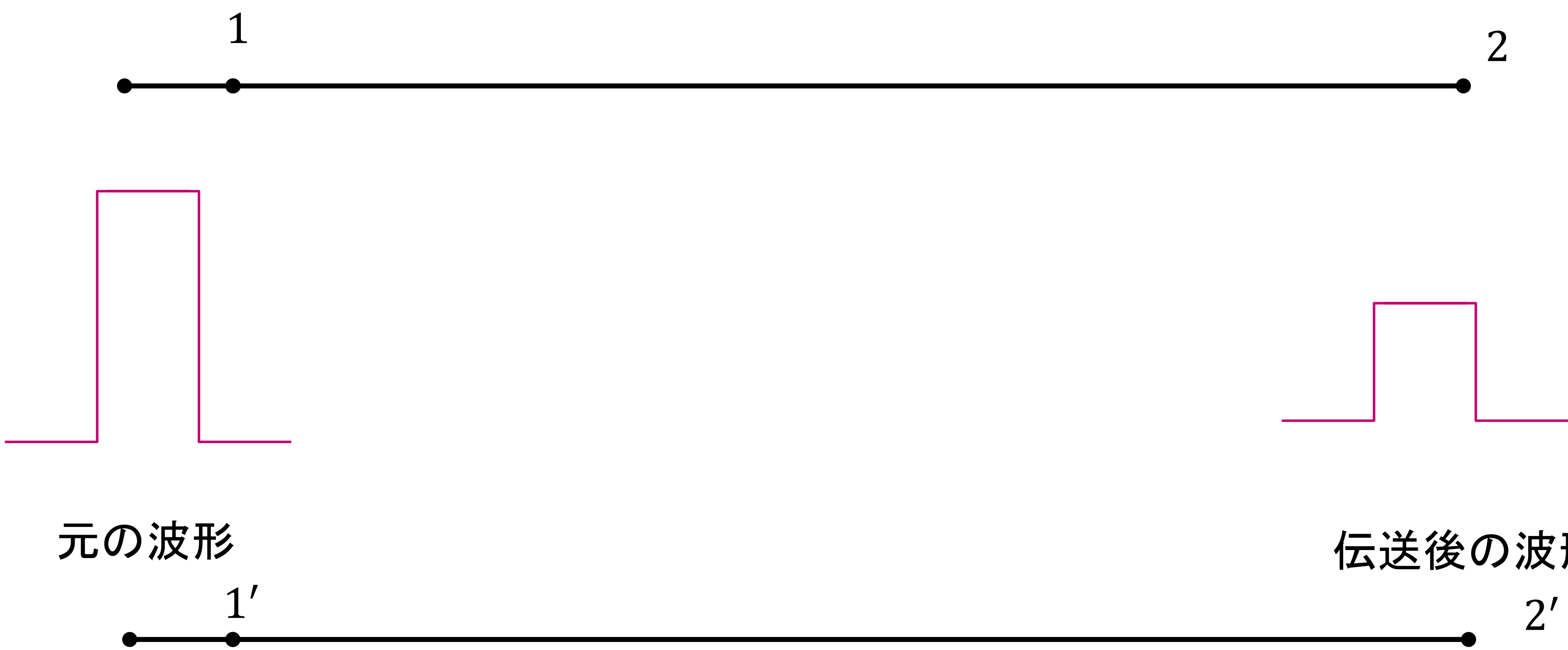
$= \frac{w}{w\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

位相速度 : $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

減衰定数 : $\alpha = \sqrt{RG}$

周波数に
依存しない


基本波の奇数倍
の高調波
7次
5次
3次
基本波



無ひずみ伝送

無ひずみ伝送線路の特性インピーダンス: Z_0

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + jwL}{G + jwC}}$$

無ひずみ伝送条件　$CR = LG$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + jwL}{G + jwC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{R}{G}}$$

特性インピーダンスZ_0は各周波数wに依存せず一定値となる

伝送線路方程式の双曲線関数表現