伝送線路方程式の双曲線関数表現

電圧波

$$V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$$

電流波

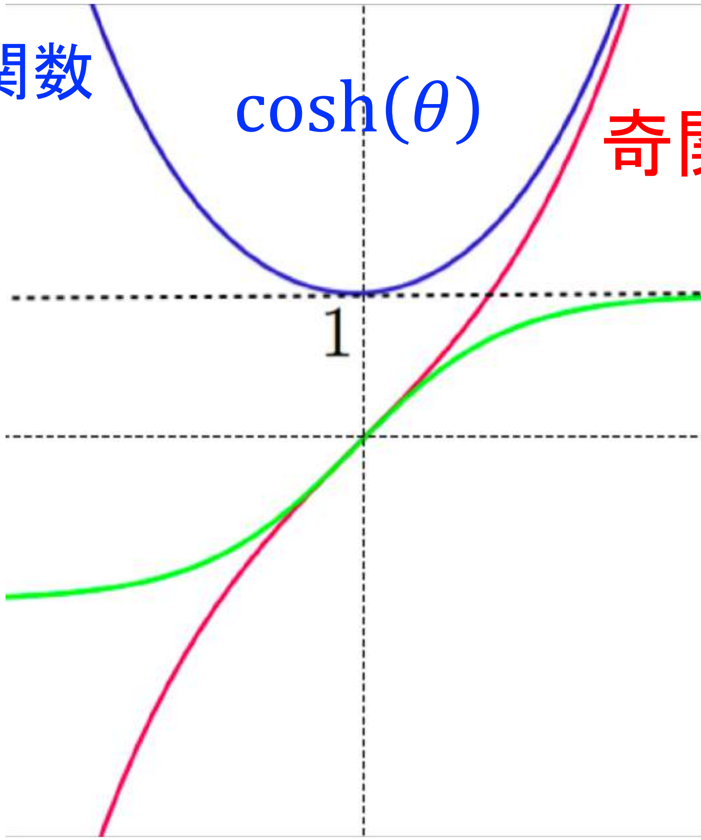
$$I(x) = \sqrt{\frac{Y}{Z}}Ae^{-\gamma x} - \sqrt{\frac{Y}{Z}}Be^{\gamma x}$$

伝送線路方程式の双曲線関数表現

$$\sinh(\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

$$\cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

偶関数



奇関数

$\sinh(\theta)$

tanh(θ)

$$cosh(0) = 1$$

$$sinh(0) = 0$$

$$tanh(0) = 0$$

$$cosh^2(\theta) - sinh^2(\theta) = 1$$

$$\cosh \boldsymbol{j\theta} = \cos \boldsymbol{\theta} \qquad \sinh \boldsymbol{j\theta} = \mathrm{j}\sin \boldsymbol{\theta}$$

$$e^{\pm\theta} = \cosh(\theta) \pm \sinh(\theta)$$

$$e^{\pm\gamma x} = \cosh(\boldsymbol{\gamma x}) \pm \sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$

$$V(x) = \boldsymbol{Ae}^{-\gamma x} + B\boldsymbol{e}^{\gamma x}$$

$$= A\cosh(\boldsymbol{\gamma x}) - A\sinh(\boldsymbol{\gamma x}) + \boldsymbol{B}\cosh(\boldsymbol{\gamma x}) + \boldsymbol{B}\sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$

$$= (A + B)\cosh(\boldsymbol{\gamma x}) + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})\sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$

$$= A'\cosh(\boldsymbol{\gamma x}) + B'\sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_0}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{x}} - B\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{x}})$$

$$A + B = A'$$

$$\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = B'$$

$$I(x) = -\frac{1}{Z_0}\{B' \cosh(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{x}) + A' \sinh(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{x})\}$$

双曲線関数を用いて一般解

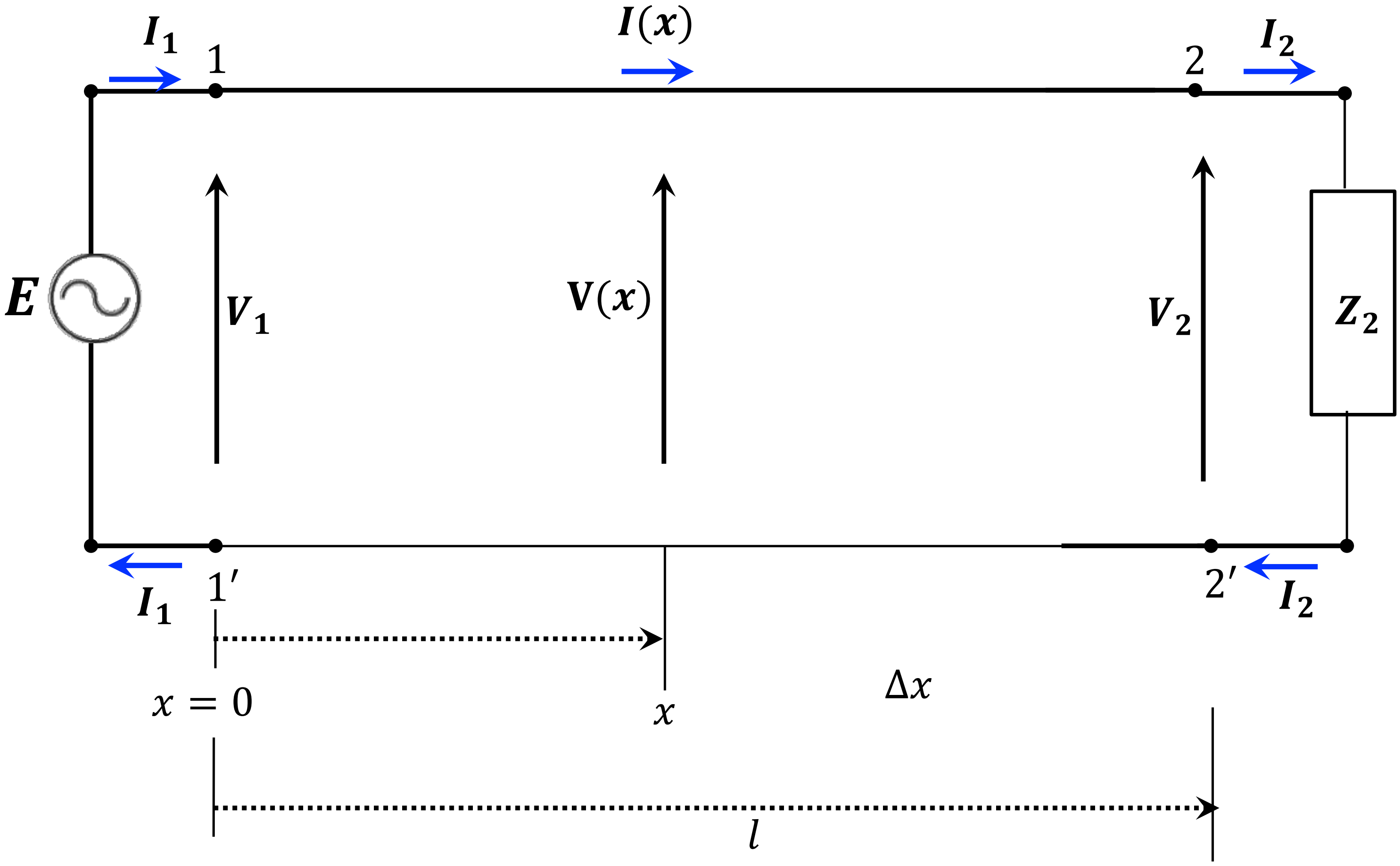
双曲線関数を用いると、伝送線路における電圧と電流に対する波動方程式の一般解:

$$V(x) = A' \cosh(\boldsymbol{\gamma x}) + B' \sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$

$$I(x) = -\frac{1}{Z_0}\{B' \cosh(\boldsymbol{\gamma x}) + A' \sinh(\boldsymbol{\gamma x})\}$$

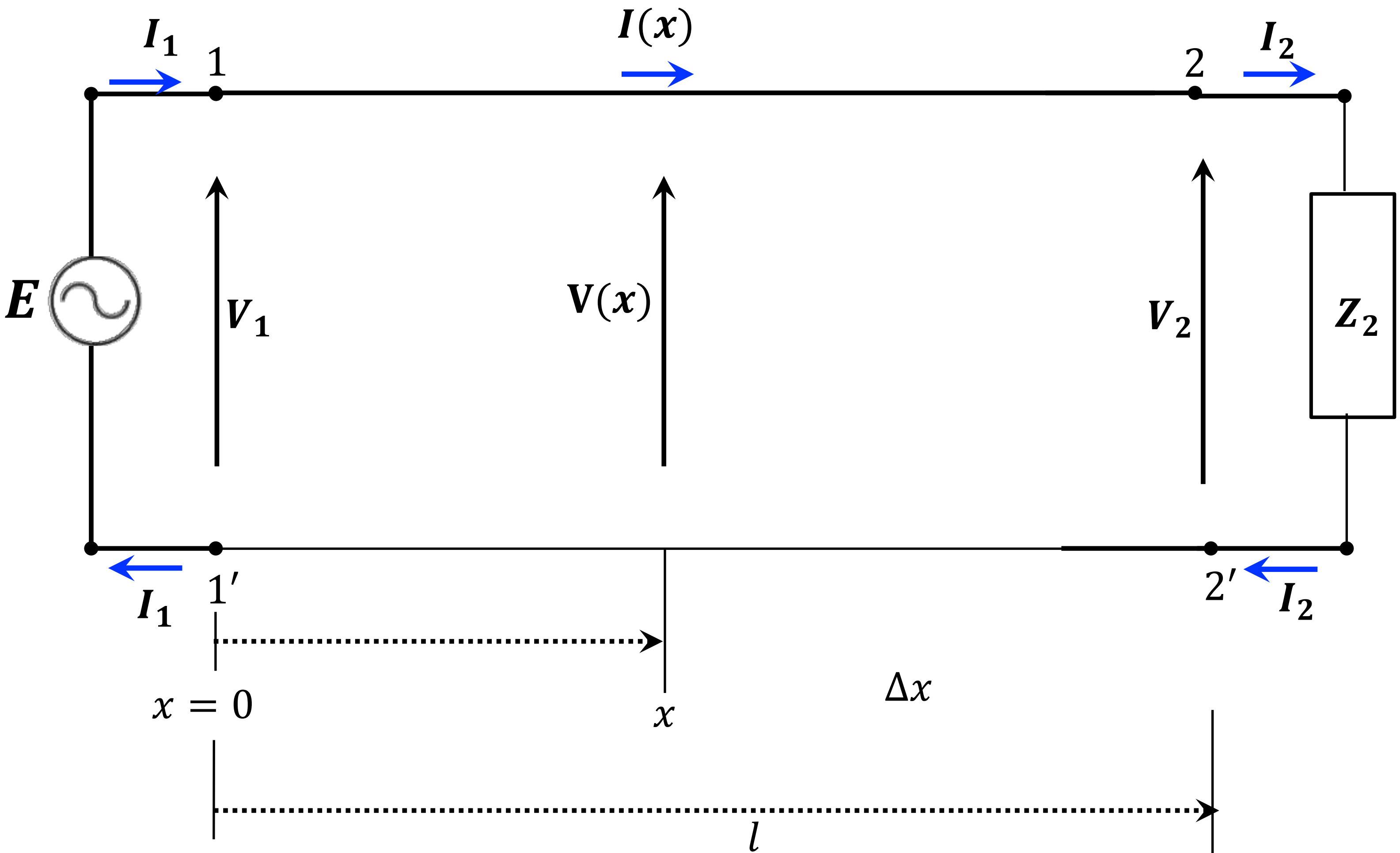
伝送線路上の電圧と電流の空間分布を充電端や送電端における境界条件を与えて求める場合などには指数関数より双曲線関数形式を用いると計算しやすい。

有限長線路における境界条件



(a) 送電端の境界条件が与えられる場合

$$\boldsymbol{V_1 = V(0)} \qquad \boldsymbol{I_1 = I(0)}$$



$x = 0$を代入する

$$V(0) = A' \cosh(\boldsymbol{\gamma} * \mathbf{0}) + B' \sinh(\boldsymbol{\gamma} * \mathbf{0})$$

$$A' = V(0) = \boldsymbol{V_1}$$

$$I(0) = -\frac{1}{Z_0}\{B' \cosh(\boldsymbol{\gamma} * \mathbf{0}) - A' \sinh(\boldsymbol{\gamma} * \mathbf{0})\}$$

$$B' = -Z_0 \boldsymbol{I}(\mathbf{0}) = -Z_0 \boldsymbol{I_1}$$

電圧波

$$\boldsymbol{V(x) = Ae^{-\gamma x}} + B\boldsymbol{e^{\gamma x}}$$

$$\boldsymbol{V(0) = A} + B$$

電流波

$$\boldsymbol{I(x)} = \frac{1}{Z_0}\boldsymbol{Ae^{-\gamma x}} - \frac{1}{Z_0}\boldsymbol{Be^{\gamma x}}$$

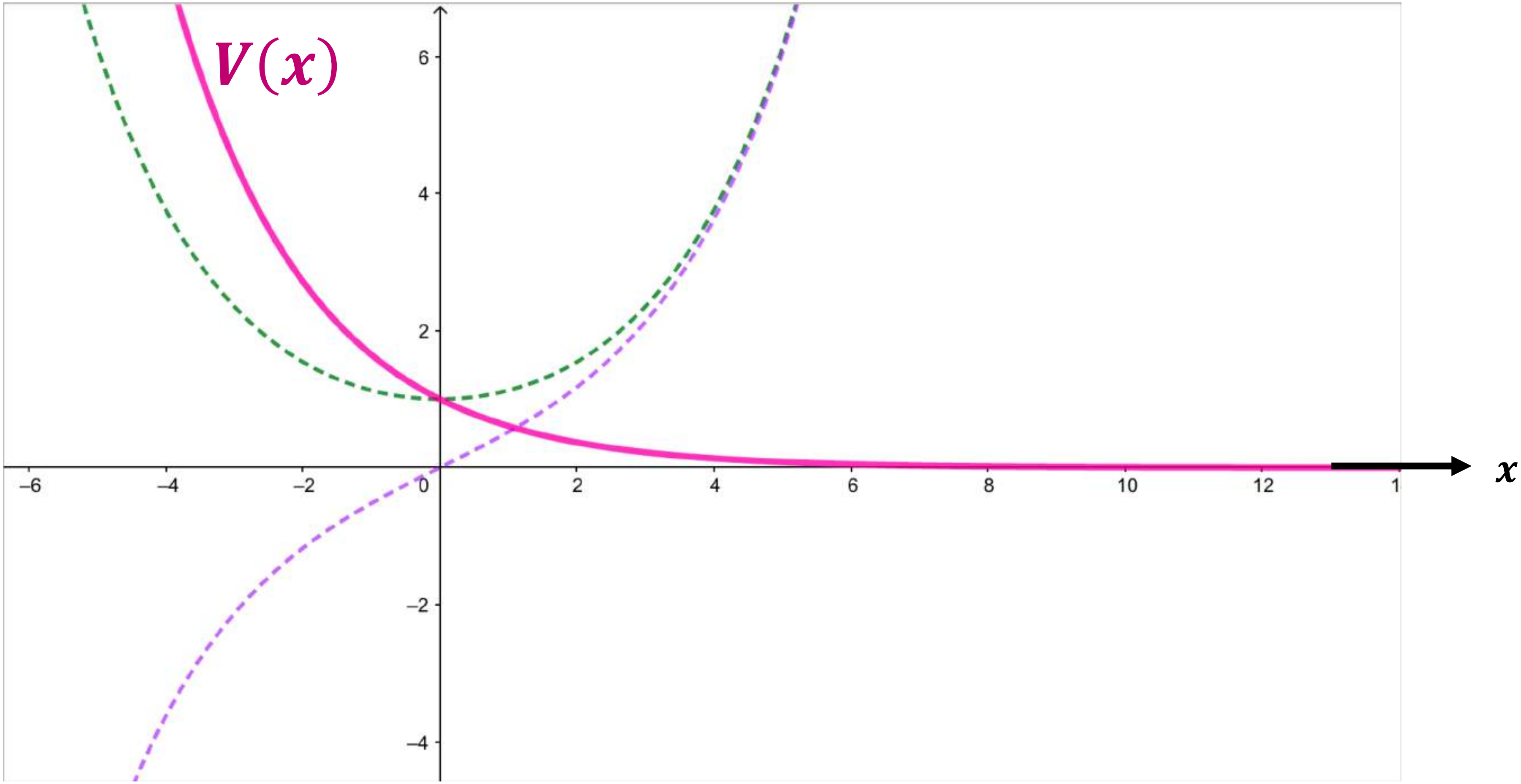
$$\boldsymbol{I(0)} = \frac{1}{Z_0}\boldsymbol{A} - \frac{1}{Z_0}\boldsymbol{B}$$

送電端の境界条件が与えられる場合の一般解

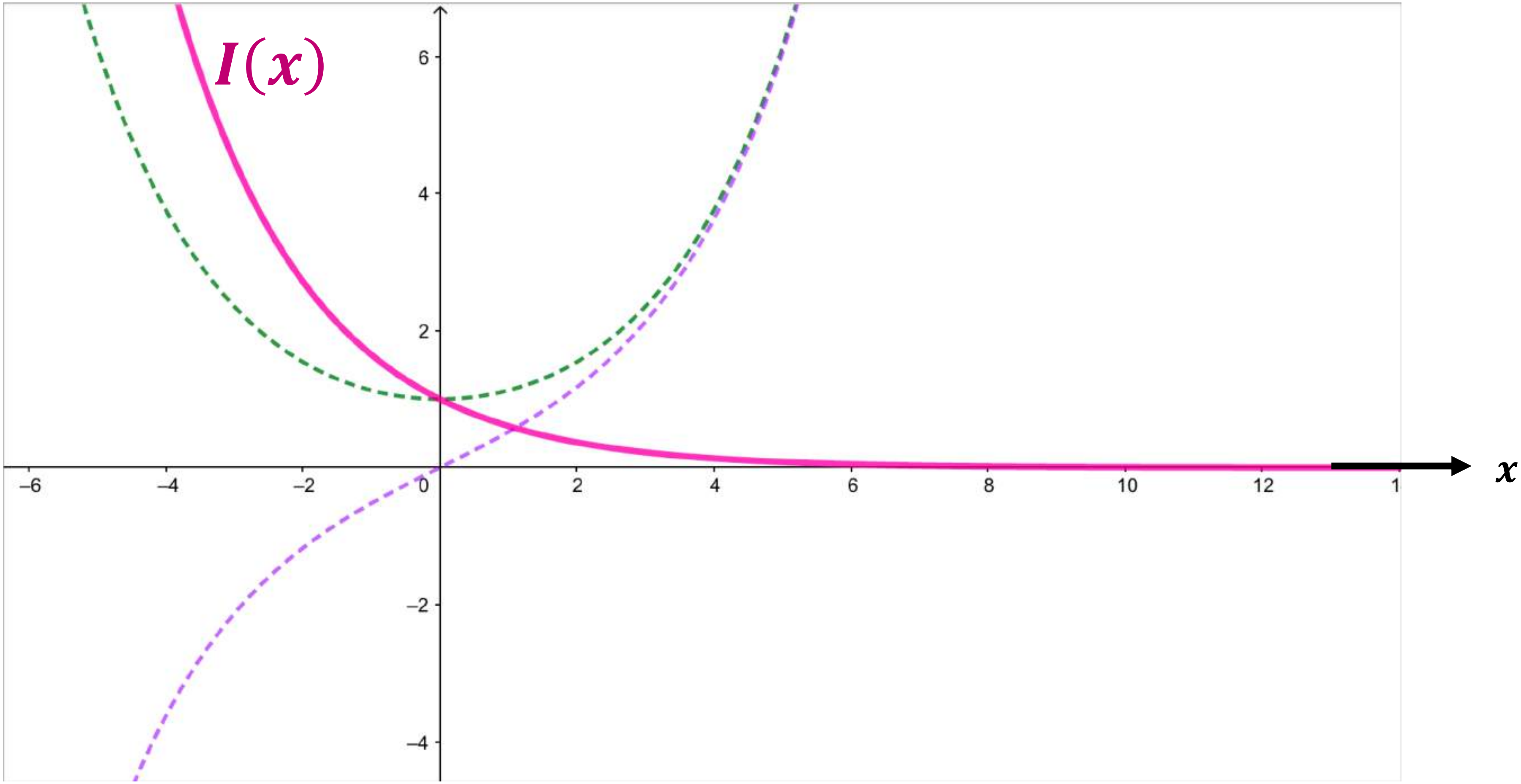
$$A' = \boldsymbol{V_1} \qquad B' = -Z_0\boldsymbol{I_1}$$

$$V(x) = \boldsymbol{V_1}\cosh(\boldsymbol{\gamma x}) - Z_0\boldsymbol{I_1}\sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$

$$I(x) = \boldsymbol{I_1}\cosh(\boldsymbol{\gamma x}) - \frac{\boldsymbol{V_1}}{Z_0}\sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$



$$V(x) = 1 * \cosh(0.5 * x) - 1 * \sinh(0.5x)$$



$$I(x) = 1 * \cosh(0.5 * x) - 1 * \sinh(0.5x)$$

$$V(x) = \boldsymbol{V_1} \cosh(\boldsymbol{\gamma x}) - Z_0 \boldsymbol{I_1} \sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$

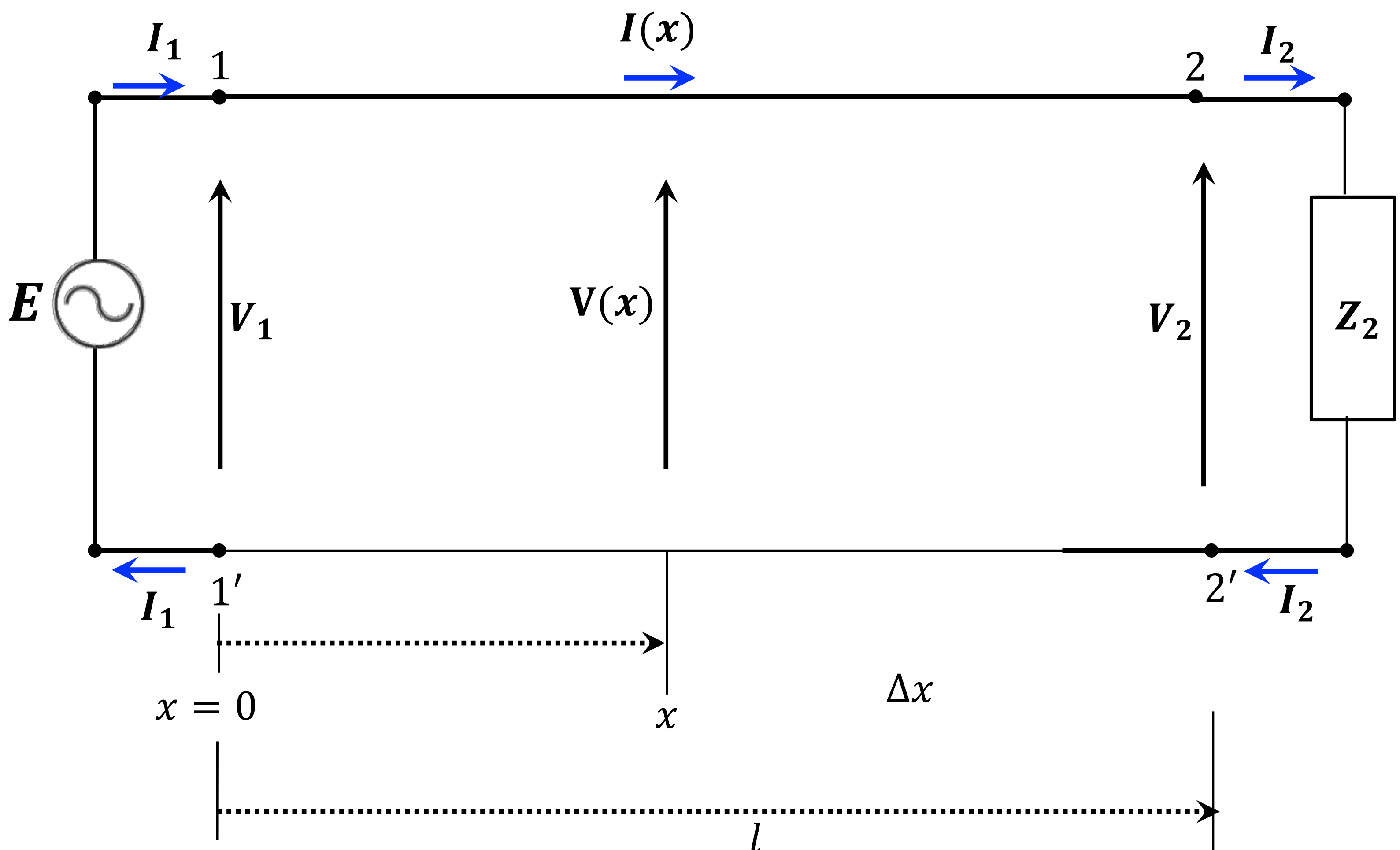
線路が持つ直列インピーダンスによる電圧降下である

$$I(x) = \boldsymbol{I_1} \cosh(\boldsymbol{\gamma x}) - \frac{\boldsymbol{V_1}}{Z_0} \sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$

線路が持つ並列アドミタンスによる電流の減少である。

(b) 受電端の境界条件が与えられる場合

$$V_2 = V(l) \qquad I_2 = I(l)$$



$x = l$を代入する

$$V(l) = \boldsymbol{V_2} = A' \cosh(\boldsymbol{\gamma l}) + B' \sinh(\boldsymbol{\gamma l})$$

$$I(l) = \boldsymbol{I_2} = -\frac{1}{Z_0}\{B' \cosh(\boldsymbol{\gamma l}) + A' \sinh(\boldsymbol{\gamma l})\}$$

$$A' = \boldsymbol{V_2} \cosh(\boldsymbol{\gamma l}) + Z_0 \boldsymbol{I_2} \sinh(\boldsymbol{\gamma l})$$

$$B' = -Z_0 \boldsymbol{I_2} \cosh(\boldsymbol{\gamma l}) - \boldsymbol{V_2} \sinh(\boldsymbol{\gamma l})$$

$$A' = \boldsymbol{V_2} \cosh(\boldsymbol{\gamma l}) + Z_0 \boldsymbol{I_2} \sinh(\boldsymbol{\gamma l})$$

$$B' = -Z_0 \boldsymbol{I_2} \cosh(\boldsymbol{\gamma l}) - \boldsymbol{V_2} \sinh(\boldsymbol{\gamma l})$$

$$V(x) = A' \cosh(\boldsymbol{\gamma x}) + B' \sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$

$$I(x) = -\frac{1}{Z_0}\{B' \cosh(\boldsymbol{\gamma x}) + A' \sinh(\boldsymbol{\gamma x})\}$$

$$V(x) = \{\boldsymbol{V}_2 \cosh(\boldsymbol{\gamma l}) + Z_0 \boldsymbol{I}_2 \sinh(\boldsymbol{\gamma l})\} \cosh(\boldsymbol{\gamma x})$$
$$+\{-Z_0 \boldsymbol{I}_2 \cosh(\boldsymbol{\gamma l}) - \boldsymbol{V}_2 \sinh(\boldsymbol{\gamma l})\} \sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$

$$V(x) = \boldsymbol{V}_2 \{\cosh(\boldsymbol{\gamma l}) \cosh(\boldsymbol{\gamma x}) - \sinh(\boldsymbol{\gamma l}) \sinh(\boldsymbol{\gamma x})\}$$
$$+Z_0 \boldsymbol{I}_2 \{\sinh(\boldsymbol{\gamma l}) \cosh(\boldsymbol{\gamma x}) - \cosh(\boldsymbol{\gamma l}) \sinh(\boldsymbol{\gamma x})\}$$

双曲線関数加法定理

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta$$
$$\sinh(\alpha - \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta - \cosh \alpha \sinh \beta$$
$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta$$
$$\cosh(\alpha - \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta - \sinh \alpha \sinh \beta$$

$$V(x) = \boldsymbol{V_2}\cosh(\boldsymbol{\gamma l} - \boldsymbol{\gamma x}) + Z_0\boldsymbol{I_2}\sinh(\boldsymbol{\gamma l} - \boldsymbol{\gamma x})$$

$$V(x) = \boldsymbol{V_2}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x}) + Z_0\boldsymbol{I_2}\sinh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x})$$

同様に

$$I(x) = -\frac{1}{Z_0}\{[-Z_0\boldsymbol{I_2}\cosh(\boldsymbol{\gamma l}) - \boldsymbol{V_2}\sinh(\boldsymbol{\gamma l})]\cosh(\boldsymbol{\gamma x})$$

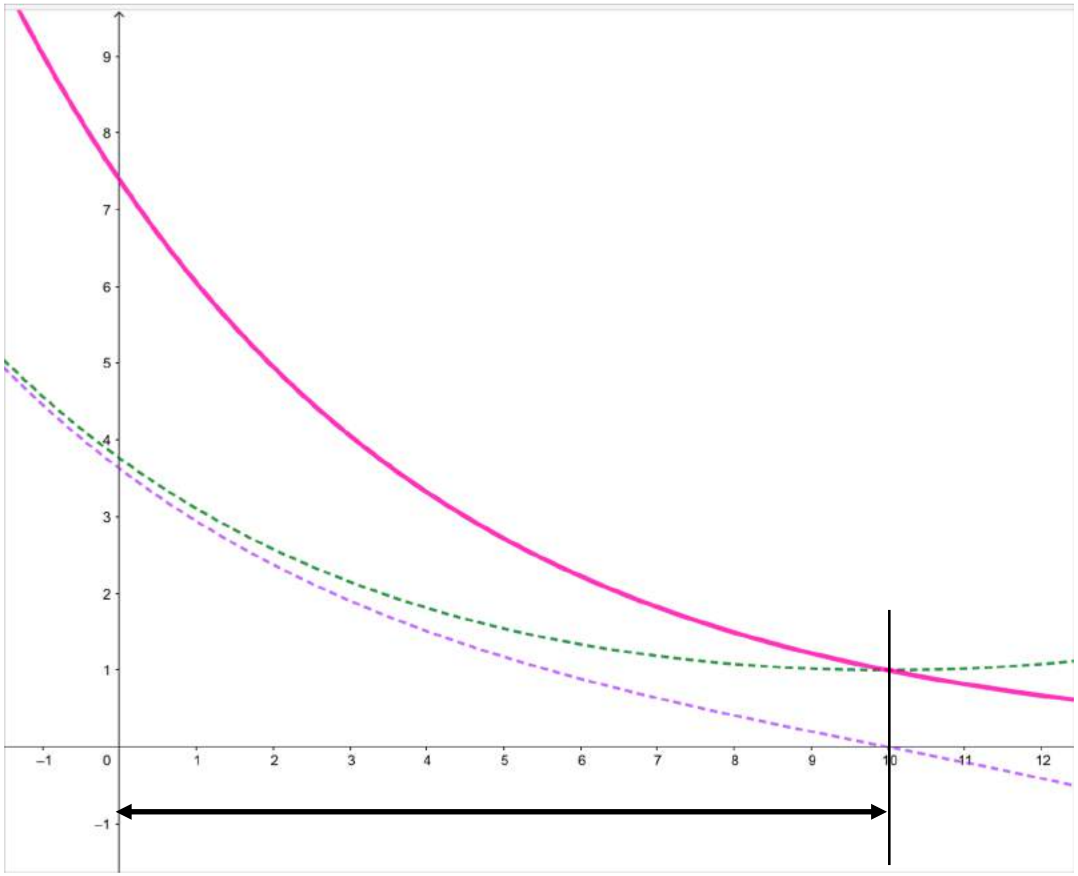
$$+[\boldsymbol{V_2}\cosh(\boldsymbol{\gamma l}) + Z_0\boldsymbol{I_2}\sinh(\boldsymbol{\gamma l})]\sinh(\boldsymbol{\gamma x})\}$$

$$I(x) = \boldsymbol{I_2}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x}) + \frac{\boldsymbol{V_2}}{Z_0}\sinh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x})$$

(b) 受電端の境界条件が既知の場合の一般解

$$V(x) = \boldsymbol{V_2}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x}) + Z_0\boldsymbol{I_2}\sinh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x})$$

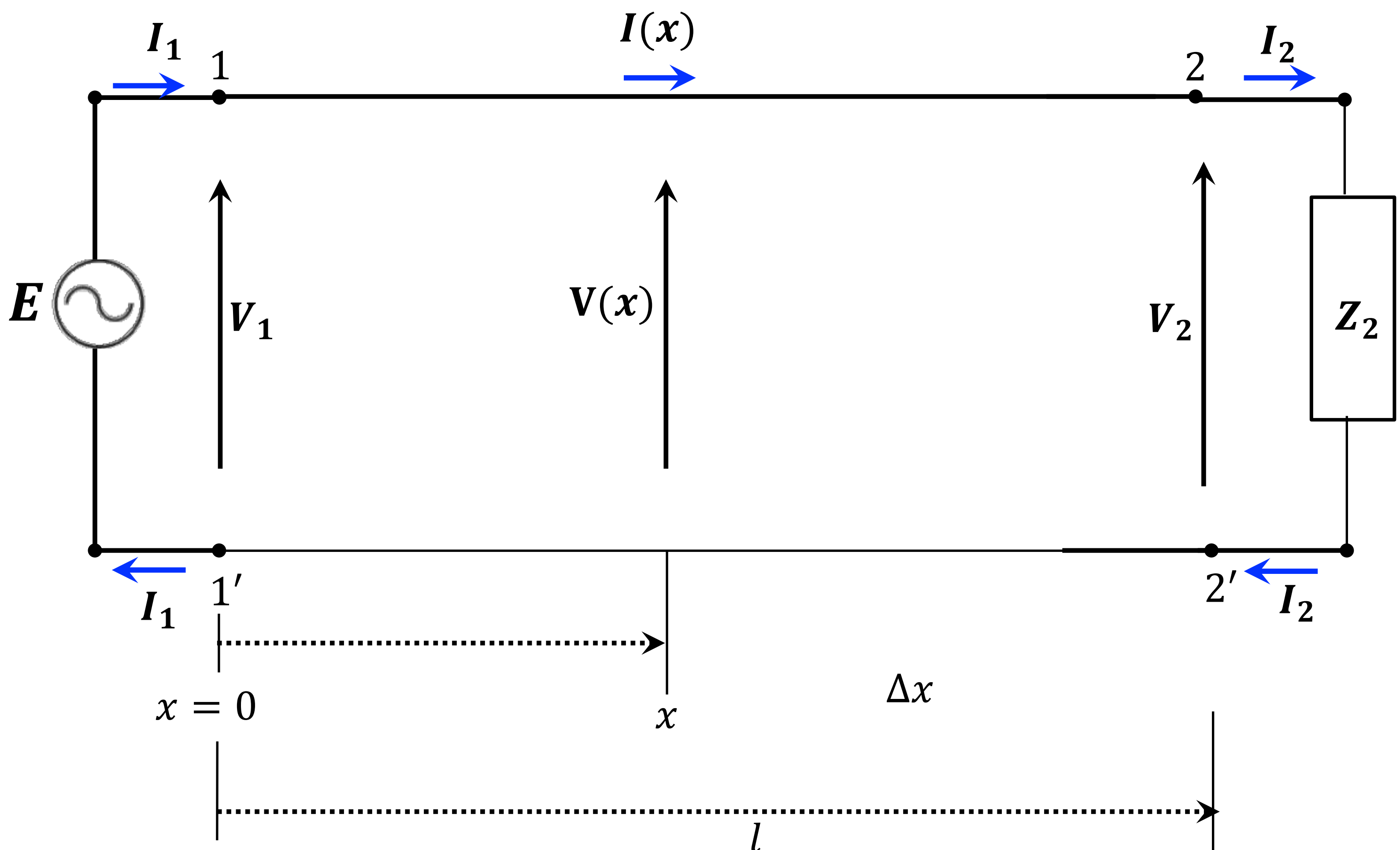
$$I(x) = \boldsymbol{I_2}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x}) + \frac{\boldsymbol{V_2}}{Z_0}\sinh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x})$$



$$\boldsymbol{V(x) = cosh0.2(10 - x) + sinh0.2(10 - x)}$$

(b) 受電端の境界条件が与えられる場合

送電端$(\boldsymbol{x}=\mathbf{0})$の電圧と電流：



$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$を代入する

$$V(x) = \boldsymbol{V_2}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x}) + Z_0\boldsymbol{I_2}\sinh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x})$$

$$I(x) = \boldsymbol{I_2}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x}) + \frac{\boldsymbol{V_2}}{Z_0}\sinh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x})$$

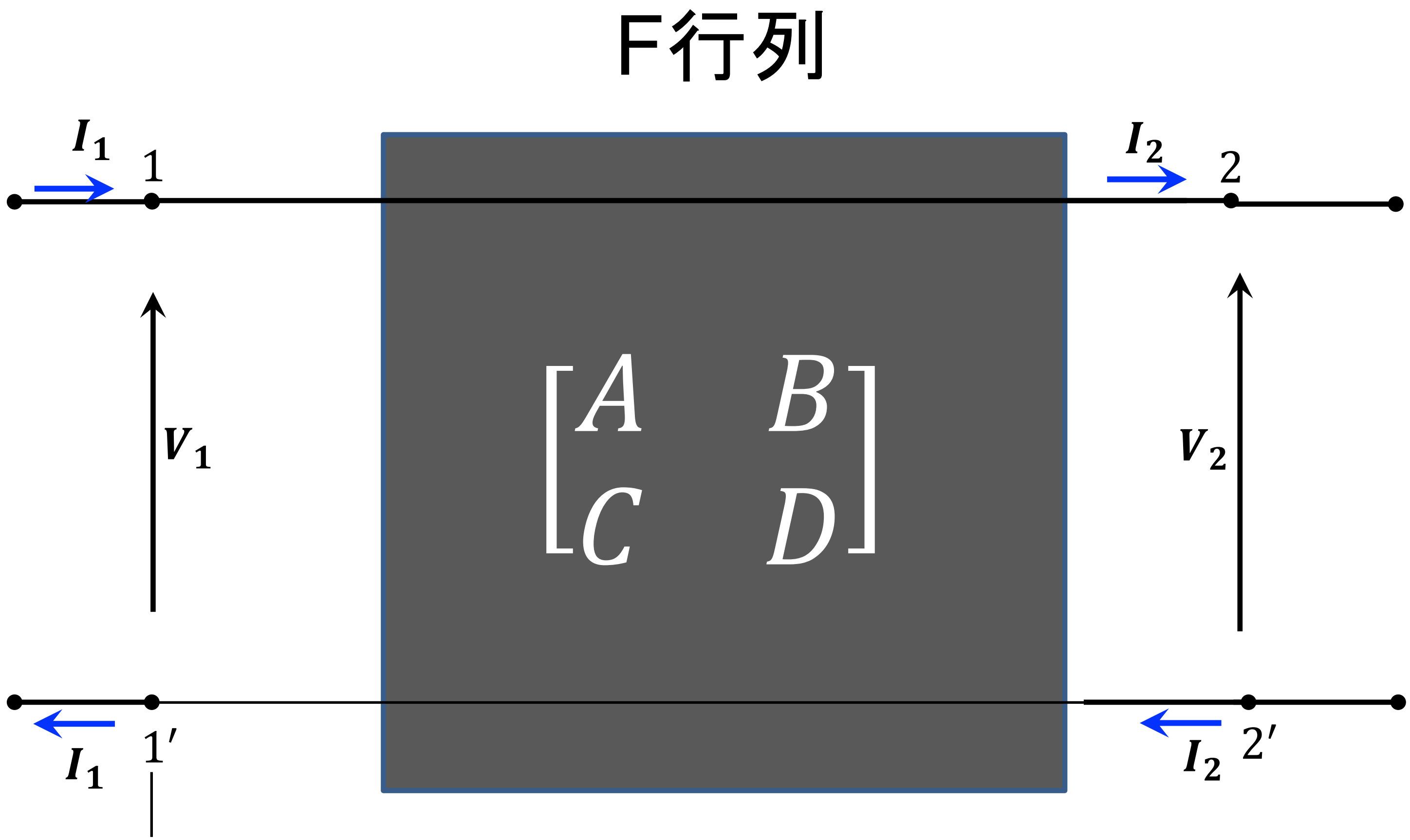
送電端($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$)の電圧：

$$\boldsymbol{V_1} = V(0) = \boldsymbol{V_2}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}) + Z_0\boldsymbol{I_2}\sinh\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{l}$$

送電端($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$)の電流：

$$\boldsymbol{I_1} = I(0) = \boldsymbol{I_2}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}) + \frac{\boldsymbol{V_2}}{Z_0}\sinh\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{l}$$

有限長線路のF行列



F行列の導出

$$\boldsymbol{V_1} = V(0) = \boldsymbol{V_2}\cosh(\boldsymbol{\gamma}l) + Z_0\,\boldsymbol{I_2}\sinh(\boldsymbol{\gamma l})$$

$$\boldsymbol{I_1} = I(0) = \boldsymbol{I_2}\cosh(\boldsymbol{\gamma}l) + \frac{\boldsymbol{V_2}}{Z_0}\sinh(\boldsymbol{\gamma l})$$

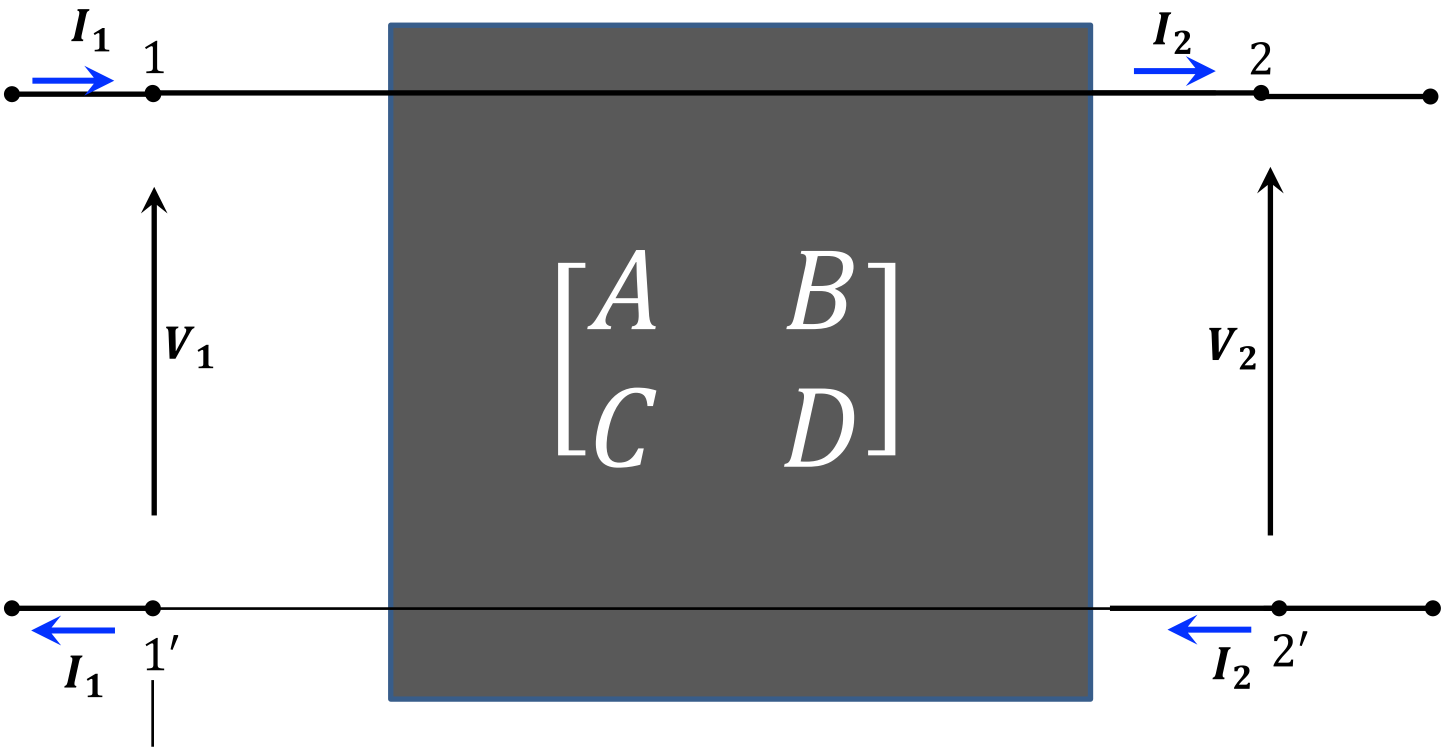
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\boldsymbol{\gamma}l) & Z_0\sinh(\boldsymbol{\gamma l}) \\ \frac{\boldsymbol{1}}{Z_0}\sinh(\boldsymbol{\gamma l}) & \cosh(\boldsymbol{\gamma}l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V_2} \\ \boldsymbol{I_2} \end{bmatrix}$$

F行列

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \boldsymbol{C} & D \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cosh(\boldsymbol{\gamma} l) & Z_0 \sinh(\boldsymbol{\gamma l}) \\ \frac{\mathbf{1}}{Z_0} \sinh(\boldsymbol{\gamma l}) & \cosh(\boldsymbol{\gamma} l) \end{bmatrix}$$

例 : 図に示す長さ$l = 2[m]$の伝送線路がある。特性インピーダンスが$Z_0 = 200[\Omega]$,
減衰定数が$\alpha = 0[Np/m]$,位相定数が$\beta = \pi/3[\mathrm{rad/m}]$であるとき、この有限線路の
Fパラメータをもとめよ



$$\text{伝達係数}:\boldsymbol{\gamma} = \alpha + j\beta = j\frac{\pi}{3}$$

$$\boldsymbol{\gamma l} = j\frac{\pi}{3} * 2 = j\frac{2\pi}{3}$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{D} = \cosh(\boldsymbol{\gamma}l) = \cosh\left(j\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathrm{B} = Z_0\sinh(\boldsymbol{\gamma l}) = 200\sinh\left(j\frac{2\pi}{3}\right) = j20\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \boldsymbol{j}\mathbf{100}\sqrt{\mathbf{3}}[\Omega]$$

$$\mathrm{C} = \frac{\mathbf{1}}{Z_0}\sinh(\boldsymbol{\gamma l}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{200}}\sinh\left(j\frac{2\pi}{3}\right) = j20\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \boldsymbol{j}\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{400}}[s]$$

有限長線路のインピーダンス

充電端をインピーダンスZ_2で終端させた有限長線路である、この場合において、送電端からみた線路のインピーダンスZ_{in}を表す式を導いてみよう。

$$V(x) = \boldsymbol{V}_{\mathbf{2}}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) + Z_0\boldsymbol{I}_{\mathbf{2}}\sinh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x})$$

$$I(x) = \boldsymbol{I}_{\mathbf{2}}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) + \frac{\boldsymbol{V}_{\mathbf{2}}}{Z_0}\sinh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x})$$

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = \frac{\boldsymbol{V}_{\mathbf{2}}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) + Z_0\boldsymbol{I}_{\mathbf{2}}\sinh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{I}_{\mathbf{2}}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) + \frac{\boldsymbol{V}_{\mathbf{2}}}{Z_0}\sinh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x})}$$

$$Z_{in} = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{\boldsymbol{V}_{\mathbf{2}}\cosh\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{l} + Z_0\boldsymbol{I}_{\mathbf{2}}\sinh\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{I}_{\mathbf{2}}\cosh\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{l} + \frac{\boldsymbol{V}_{\mathbf{2}}}{Z_0}\sinh\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{l}}$$

また充電端において

$$Z_2 = \frac{\boldsymbol{V_2}}{\boldsymbol{I_2}} \qquad Z_{in} = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{\boldsymbol{V_2}\cosh\boldsymbol{\gamma l} + Z_0\boldsymbol{I_2}\sinh\boldsymbol{\gamma l}}{\boldsymbol{I_2}\cosh\boldsymbol{\gamma l} + \frac{\boldsymbol{V_2}}{Z_0}\sinh\boldsymbol{\gamma l}}$$

$$Z_{in} = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{\frac{\boldsymbol{V_2}}{\boldsymbol{I_2}}\cosh\boldsymbol{\gamma l} + Z_0\sinh\boldsymbol{\gamma l}}{\cosh\boldsymbol{\gamma l} + \frac{\boldsymbol{V_2}}{\boldsymbol{I_2}}\frac{\boldsymbol{1}}{Z_0}\sinh\boldsymbol{\gamma l}}$$

$$Z_{in} = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{Z_2\cosh\boldsymbol{\gamma l} + Z_0\sinh\boldsymbol{\gamma l}}{\cosh\boldsymbol{\gamma l} + \frac{Z_2}{Z_0}\sinh\boldsymbol{\gamma l}}$$

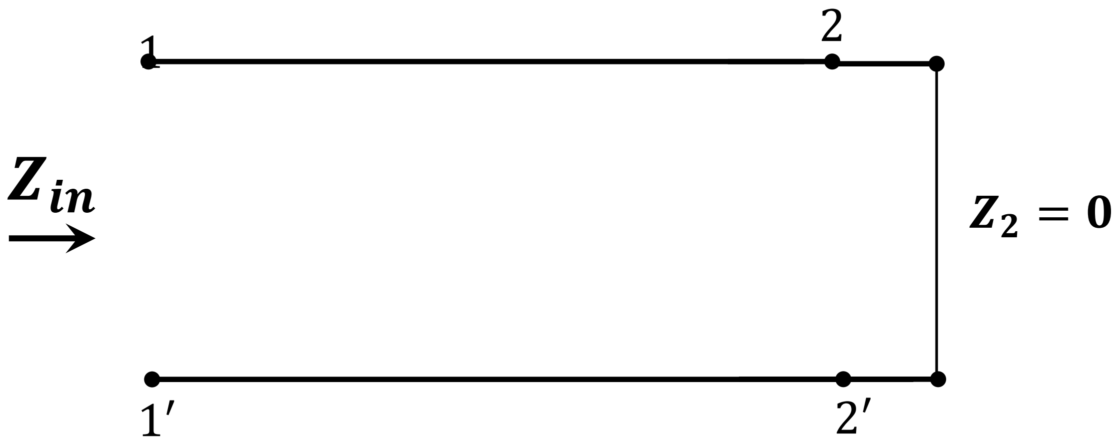
(a)受電端が特性インピーダンスZ_0で終端されている場合($Z_2 = Z_0$)

$$Z_{in} = \frac{Z_0 \cosh \boldsymbol{\gamma l} + Z_0 \sinh \boldsymbol{\gamma l}}{\cosh \boldsymbol{\gamma l} + \sinh \boldsymbol{\gamma l}}$$

$$Z_{in} = Z_0$$

Z_{in}が伝送線路の長さ$\boldsymbol{l}$に依存せず。また、その値が特性インピーダンスZ_0と常に一致している

(b)受電端が短絡されている場合：$Z_2 = 0$



$$Z_{in} = \frac{Z_2 \cosh \boldsymbol{\gamma l} + Z_0 \sinh \boldsymbol{\gamma l}}{\cosh \boldsymbol{\gamma l} + \frac{Z_2}{Z_0} \sinh \boldsymbol{\gamma l}}$$

$$Z_{in} = \frac{Z_0 \sinh \boldsymbol{\gamma l}}{\cosh \boldsymbol{\gamma l}} = Z_0 \tanh \boldsymbol{\gamma l}$$

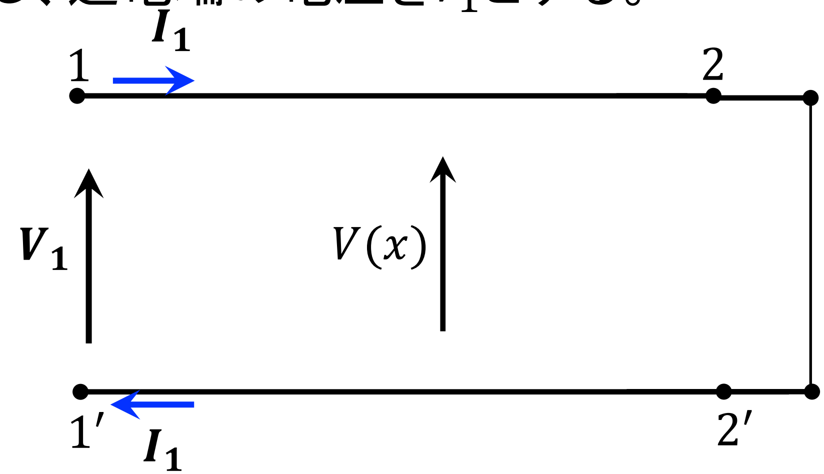
(c)受電端が開放されている場合: $Z_2 = \infty$

$$Z_{in} = \frac{Z_2 \cosh \boldsymbol{\gamma l} + Z_0 \sinh \boldsymbol{\gamma l}}{\cosh \boldsymbol{\gamma l} + \frac{Z_2}{Z_0} \sinh \boldsymbol{\gamma l}}$$

$$Z_{in} = \frac{\cosh \boldsymbol{\gamma l} + \frac{Z_0}{Z_2} \sinh \boldsymbol{\gamma l}}{\frac{1}{Z_2} \cosh \boldsymbol{\gamma l} + \frac{1}{Z_0} \sinh \boldsymbol{\gamma l}}$$

$$Z_{in} = \frac{\cosh \boldsymbol{\gamma l}}{\frac{1}{Z_0} \sinh \boldsymbol{\gamma l}} = Z_0 \coth \boldsymbol{\gamma l}$$

例：長さ$\boldsymbol{l}$の伝送線路において、受電端を短絡した場合の、送電端からの距離xにおける電圧V(x)を求めよ。ただし、送電端の電圧をV_1とする。



送電端の電圧が既知であるので

$$V(x) = \boldsymbol{V_1} \cosh(\boldsymbol{\gamma x}) - Z_0 \boldsymbol{I_1} \sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$

受電端$x = l$を短絡しているので、 $V(l) = 0$

$$\boldsymbol{V_1} \cosh(\boldsymbol{\gamma l}) - Z_0 \boldsymbol{I_1} \sinh(\boldsymbol{\gamma l}) = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{I_1} = \frac{\boldsymbol{V_1} \cosh(\boldsymbol{\gamma l})}{Z_0 \sinh(\boldsymbol{\gamma l})}$$

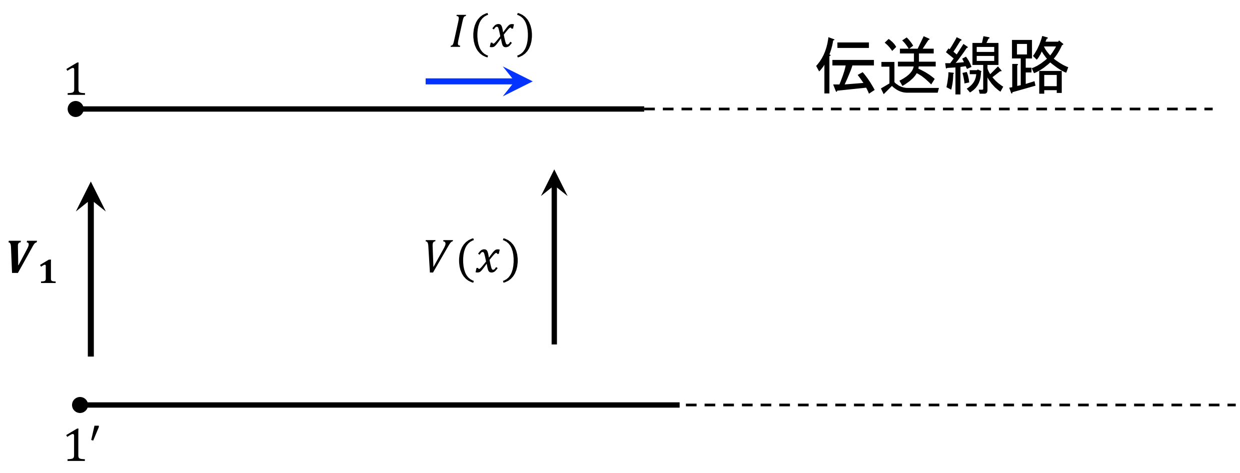
$$V(x) = \boldsymbol{V_1}\cosh(\boldsymbol{\gamma x}) - Z_0\boldsymbol{I_1}\sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$

$$V(x) = \boldsymbol{V_1}\cosh(\boldsymbol{\gamma x}) - Z_0\frac{\boldsymbol{V_1}\cosh(\boldsymbol{\gamma l})}{Z_0\sinh(\boldsymbol{\gamma l})}\sinh(\boldsymbol{\gamma x})$$

$$V(x) = \frac{\boldsymbol{V_1}}{\sinh(\boldsymbol{\gamma l})}\{\cosh(\boldsymbol{\gamma x})\sinh(\boldsymbol{\gamma l}) - \cosh(\boldsymbol{\gamma l})\sinh(\boldsymbol{\gamma x})\}$$

$$V(x) = \frac{\boldsymbol{V_1}\sinh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x})}{\sinh\ (\boldsymbol{\gamma l})}$$

半無限長線路



$$V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x})$$

波の進行はxの正の方向に取っているが、このとき、$x \to \infty$　で与えられる無限遠点を考える。

$$V(x) = \boldsymbol{Ae^{-\alpha x}\ e^{-j\beta x}} + \boldsymbol{Be^{\alpha x}\ e^{j\beta x}}$$

入射波　反射波

$\boldsymbol{x} \to \infty$

$\boldsymbol{Ae^{-\alpha x}\ e^{-j\beta x}}$の振幅：$\boldsymbol{Ae^{-\alpha x}} \to \mathbf{0}$

$\boldsymbol{x} \to \infty$

$\boldsymbol{Be^{\alpha x}\ e^{j\beta x}}$の振幅：$\boldsymbol{Be^{\alpha x}} \to \infty$

$B = 0$にならないとだめ！！

反射波は生じない

半無限長線路の波動方程式

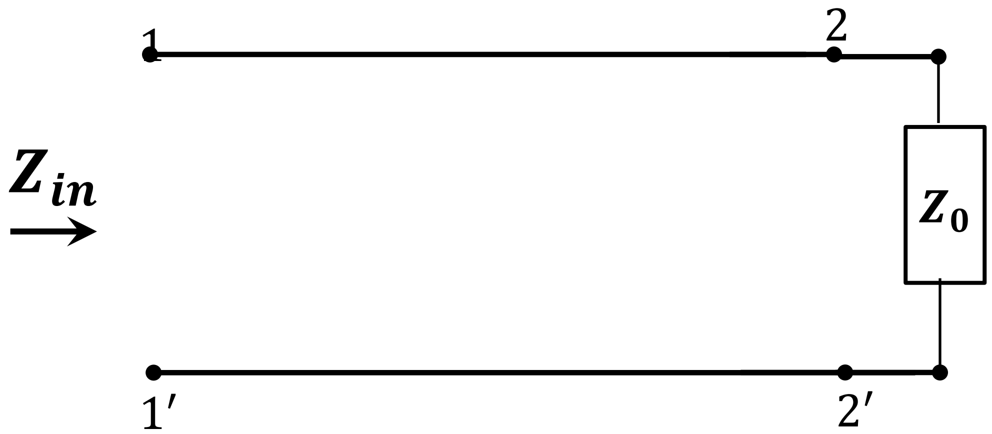
$$B = 0$$

$$V(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{x}} \qquad I(x) = \frac{1}{Z_0}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{x}}$$

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_0$$

線路上の任意の点xにおいて、電圧と電流の比はつねに特性インピーダンスZ_0と一致する。

(a)受電端が特性インピーダンスZ_0で終端されている場合($Z_2 = Z_0$)



$$Z_{in} = Z_0$$

Z_{in}が伝送線路の長さ$\boldsymbol{l}$に依存せず。また、その値が特性インピーダンスZ_0と常に一致している

半無限長線路と整合との関係

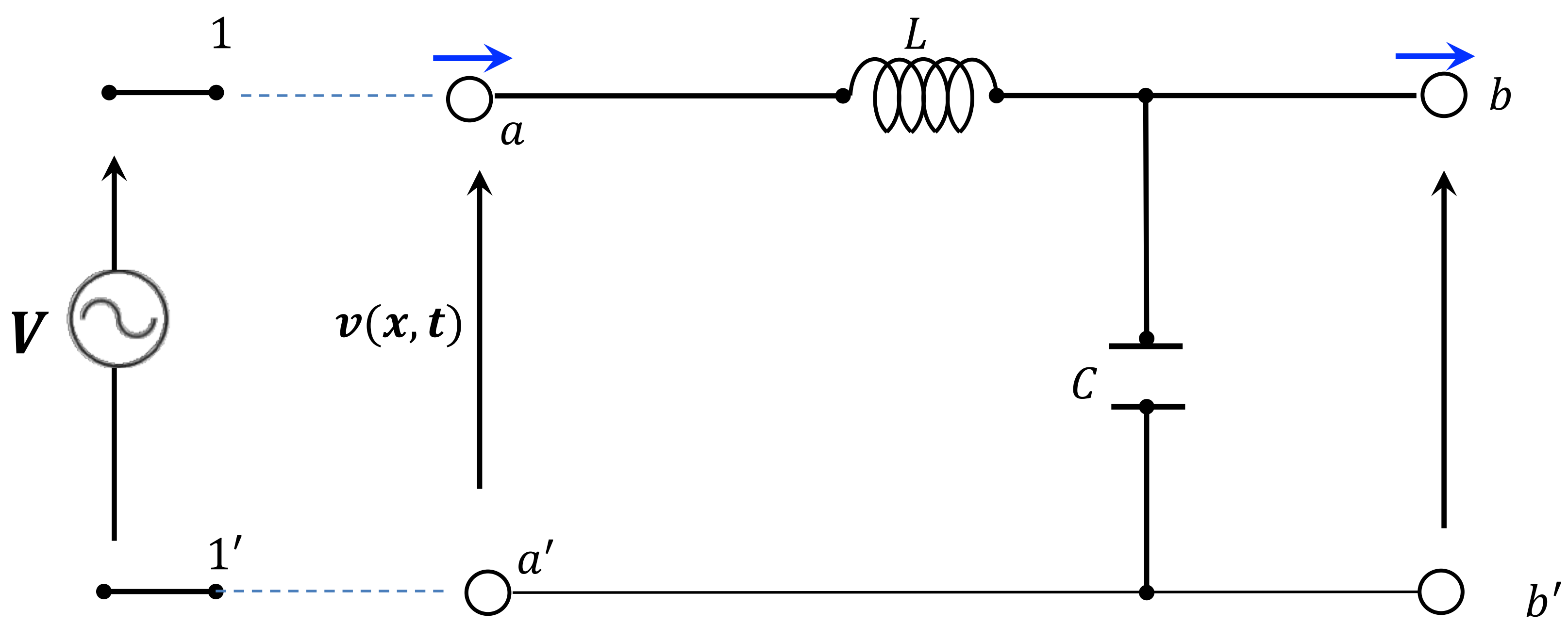
半無限長線路は有限長線路の受電端を特性インピーダンスZ_0で終端した場合と等価である。Z_0で終端することを、整合をとる（マッチング）という、この時、反射波が生じない

反射波が生じると、伝送線路上で信号波が乱れたり、あるいは、定在波が発生して、伝送線路上のいちによって信号の大きさの大小が現れたりする。これを避けるために、一般に伝送線路においては、充電端を特性インピーダンスZ_0で終端し、反射波は発生しないようにして用いる。これにより、入射した波のエネルギーはインピーダンスZ_0で吸収され、また、受電端に電力が効率的に供給される。

無損失回路

$R = 0, G = 0$を満たす回路は無損失回路という。

ジュール損失は存在しない



無損失回路における伝搬係数

$$R = 0, G = 0$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(RG - w^2LC) + \sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2}}{2}}$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{(RG - w^2LC)^2 + (wLG + wCR)^2} - (RG - w^2LC)}{2}}$$

$$\beta = w\sqrt{LC}$$

無損失回路における位相速度

$$\beta = w\sqrt{LC}$$

位相速度：　$v = \dfrac{w}{\beta}$

$$v = \frac{w}{w\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

位相速度は周波数wに依存しない一定値となる（無ひずみ伝送条件）

無損失回路とみひずみ伝送条件:

特性インピーダンスZ_0

$$\boldsymbol{Z_0 = \sqrt{\frac{R + jwL}{G + jwC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

特性インピーダンスZ_0も周波数に依存せず一定値となる。

無損失回路は無ひずみ条件をみたし、減衰定数$\boldsymbol{\alpha = 0}$
とした、無ひずみ線路の特別な場合である

無ひずみ伝送条件　$\boldsymbol{CR = LG}$

無損失回路:$\boldsymbol{R = G = 0}$:

特別な場合

無損失回路において送電端の境界条件が既知の場合：

$\alpha = 0$ $\quad \beta = w\sqrt{LC}$ $\quad \gamma = jw\sqrt{LC}$ $\quad \cosh j\theta = \cos\theta$ $\quad \sinh j\theta = \mathrm{j}\sin\theta$

送電端の境界条件が既知の場合の電流と電圧の空間分布：

$$\cosh\gamma x = \cosh j\beta x = cos\ \ \beta x$$

$$sinh\,\gamma x = \sinh j\beta x = jsin\ \ \beta x$$

$$V(x) = V_1\cosh(\gamma x) - Z_0 I_1 \sinh(\gamma x)$$

$$I(x) = I_1\cosh(\gamma x) - \frac{V_1}{Z_0}\sinh(\gamma x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} V(x) &= V_1 cos\ \ \beta x - jZ_0 I_1 sin\ \ \beta x \\ I(x) &= I_1 cos\ \ \beta x - j\frac{V_1}{Z_0} sin\ \ \beta x \end{aligned}}$$

無損失回路において受電端の境界条件が既知の場合:

$$V(x) = \boldsymbol{V_2}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) + Z_0\boldsymbol{I_2}\sinh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x})$$

$$I(x) = \boldsymbol{I_2}\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) + \frac{\boldsymbol{V_2}}{Z_0}\sinh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x})$$

$$\cosh\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) = \cosh\boldsymbol{j\beta}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x})$$

$$sin\mathrm{h}\,\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) = \sinh\boldsymbol{j\beta}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{jsin}\ \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x})$$

受電端の境界条件が既知の場合の電流と電圧の空間分布:

$$\boxed{\begin{aligned} V(x) &= \boldsymbol{V_2}\cos(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{j}Z_0\boldsymbol{I_2}\boldsymbol{sin}\ \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) \\ I(x) &= \boldsymbol{I_2}\cos(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{V_2}}{Z_0}\boldsymbol{sin}\ \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x}) \end{aligned}}$$