1-1　動的システムと静的システム

入力（input）があり，それとなんらかの因果関係を保ちながら**出力**（output）を出す機構や自然環境を一般に**システム**（system），または，**系**と呼ぶ．たとえば，図1-1の電流計は入力として端子間に流れる電流をとり，出力として指針の位置をとれば，1つのシステムとなる．

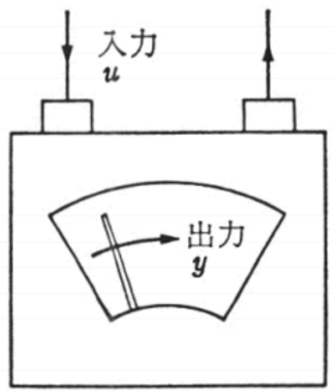


図 1-1　電流計

ある時刻での出力がその時刻の入力だけに依存するシステムを**静的システム**（static system）と呼ぶ．また出力が，その時刻，および過去の入力や，現象が始まったときの内部状態に依存するシステムを**動的システム**と呼ぶ．したがって，動的システムにおいては，過去の入力を記憶したり，内部状態を表現したりする中間変数が必要となる．この中間変数は**状態変数**（state variable）と呼ばれる（図1-2参照）．

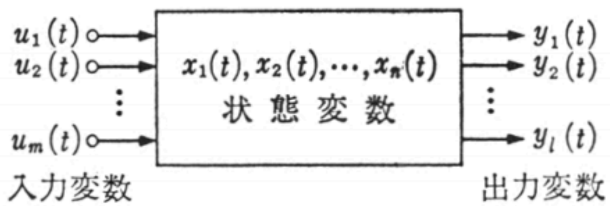


図 1-2　動的システム

1つのシステムでも，扱い方によっては静的システムとも動的システムともみなされる．たとえば，電流計では指針の位置が一定に落ち着くまでの時間を無視すれば，10Aの電流が流れたとき指針は10Aの目盛を指す．よって電流計は，入力の電流値を1倍して出力の目盛を指示する静的システムといえる．また，5Aの電流

が流れ，指針が5Aの目盛上で静止しているとき，急に10Aの電流を流すと，指針は5Aから10Aの目盛へ移動する．指針が移動する時間内を考えれば，その位置は刻々変わり，ある時刻での指針の位置は，その時刻での入力10Aばかりでなく，過去の入力5Aにも依存する．よって，動的システムともいえる．

すなわち，静的システムは定常状態にあるシステムを表現し，動的システムは過渡状態にあるシステムを表現している．

同じ理由から，直流回路論，交流回路論は静的システム，過渡回路論は動的システムの立場から回路をみたときの学問である．

一般に，静的システムは代数方程式で，動的システムは微分方程式を使って記述することができる．さらに，常微分方程式で表現される動的システムを**集中定数システム**(lumped parameter system)，偏微分方程式で表現される動的システムを**分布定数システム**（distributed parameter system）として区別する．本書では，以下集中定数システムだけを扱う．

さて，状態変数が $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ の n 個，入力変数が $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_m(t)$ の m 個，出力変数が $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_l(t)$ の l 個で記述されるシステムを考えていこう．これらをベクトルにまとめ

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_l(t) \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

としておく．$\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{y}(t)$ は，それぞれ**状態変数ベクトル** (state variable vector)，**入力変数ベクトル** (input variable vector)，**出力変数ベクトル** (output variable vector) と呼ばれる．このような動的システムは単一の n 階，または，複数の高階の常微分方程式を用いて記述されることもあるが，現代制御理論では，連立 n 次の１階常微分方程式によって

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}\{\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t\} \tag{1-2}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{g}\{\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t\} \tag{1-3}$$

として表されるものを考える．後述する線形システムでは，これらの表現の間には等価な変換が成立する．ここで，$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ は n 次元と l 次元のベクトル関数で

ある．式（1-2）は**状態方程式**（state equation），式（1-3）は**出力方程式**（output equation）と呼ばれ，状態変数の個数 n をシステム（1-2），(1-3）の（**動的**）**次元**（order）という．

とくに，$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ が $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ の線形関数となり

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{1-4}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{1-5}$$

とおけるとき，**線形時変システム**（linear time-varying system）と呼ばれる．ここで，・は微分記号で

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) \tag{1-6}$$

を意味し，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ はそれぞれ $n\times n$，$n\times m$，$l\times n$，$l\times m$ 次元の行列関数である．

また，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ が時間によらない一定行列で

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{1-7}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{1-8}$$

となるとき，**線形時不変システム**（linear time-invariant system）と呼ばれる．以下，主に，線形時不変システムについて考えていくが，このようなシステムは理論的に扱いやすく，また実際のシステムもこのようなシステムで近似されることが多い．簡単のため，システム（1-7），(1-8）を $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$ と略記することもある．また，システムの次元 n は $t>t_0$ におけるシステムの運動を唯一に決定するのに必要な，$t=t_0$ での独立な内部状態（初期値）の数から求められる．とくに，内部変数である状態変数はいろいろに選べるので，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ は唯一には定まらないが，後で述べるように伝達関数行列やシステムの基本的な性質

静的システム

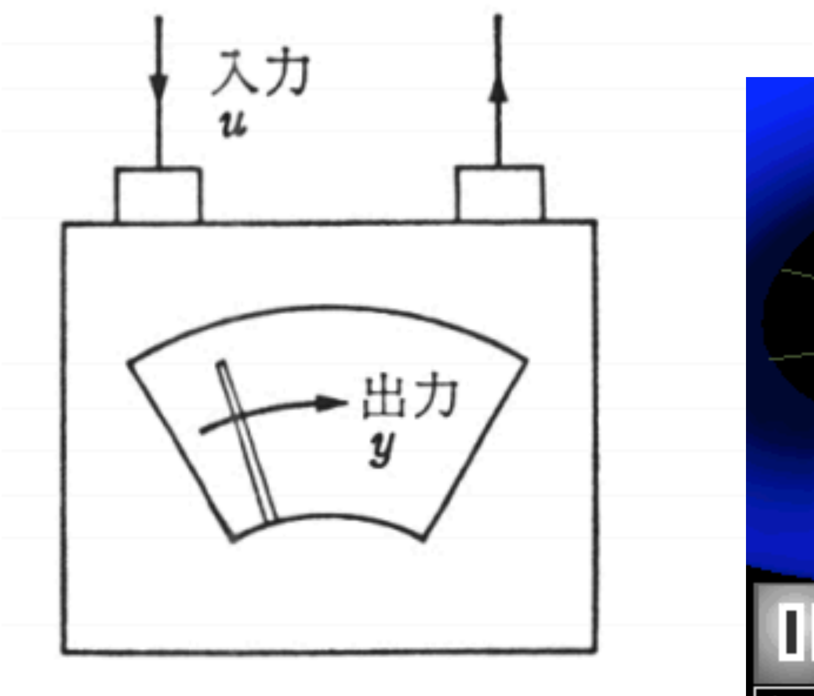
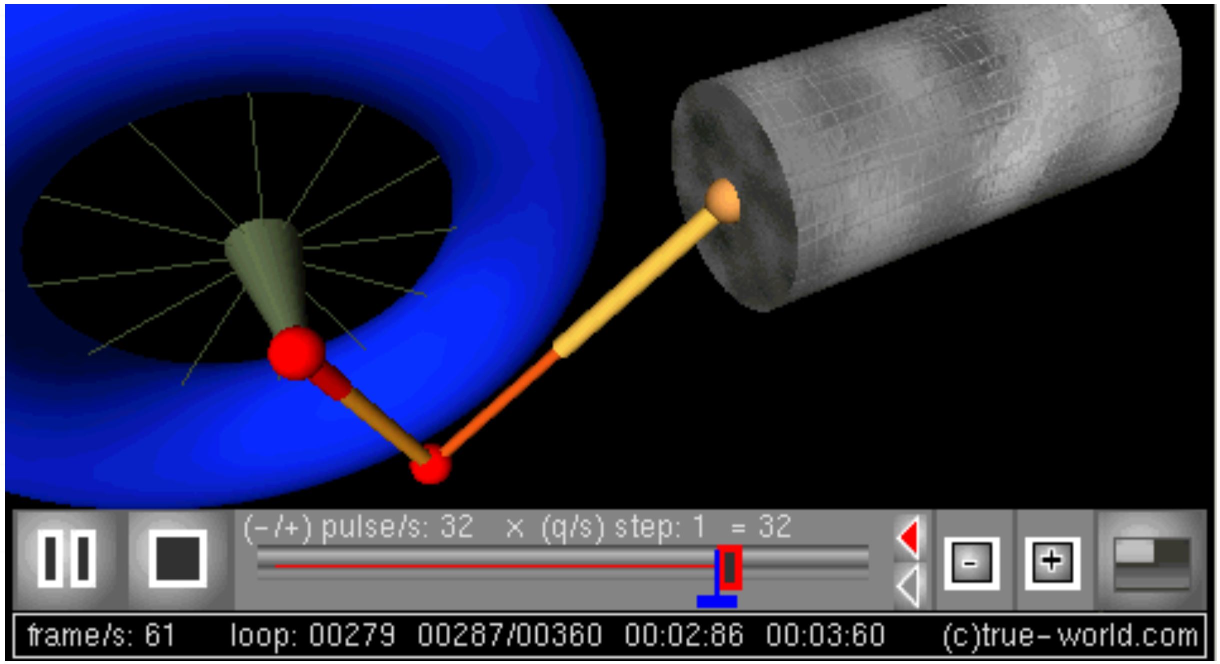


図 1-1 電流計

動的システム



$$x(t) \Rightarrow y(t)$$

図4-1: 線形時不変システム.

3　線形システムって？

皆さん、駒場で「線形代数」という講義を受けたかと思います。このときに、どんな教官であっても、「線形とはね、$f(ax+by)=af(x)+bf(y)$ が成立するってことだよ。」ということを習ったかと思います。

「線形システム」というやつも要はこれと同じ。入力 $x(t)$ に対して、出力が $y(t)$ となる時に、

$$y(t)=\Phi[x(t)] \tag{1.6}$$

が成立するとして、

$$ay_1(t)+by_2(t)=\Phi[ax_1(t)+ax_2(t)] \tag{1.7}$$

が成り立つようなシステムのことを言います。これはまさに上の話と一致しているわけです。線形システムの例としては、

$$\text{定数倍} \qquad y(t)=ax(t) \tag{1.8}$$

$$\text{微分} \qquad y(t)=\frac{d}{dt}x(t) \tag{1.9}$$

$$\text{積分} \qquad y(t)=\int x(t)dt \tag{1.10}$$

システムの分類：線形システム

条件

1. $a\,y(t) = S\{a\,x(t)\}$　　a ：実数、$x(t)$ ：任意の信号

2. $y_1(t) = S\{x_1(t)\},\ y_2(t) = S\{x_2(t)\}$ の時、

$$y_1(t) + y_2(t) = S\{x_1(t) + x_2(t)\}$$

満たさないシステム　→　非線形システム

1．　定数倍　$y(t) = a \times x(t)$

2．　遅延　$y(t) = x(t - T)$

3．　微分　$y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

4．　積分　$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$

5．　*Convolution*

$$y(t) = \int_0^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (\, x(t) = 0, \quad t < 0 \,)$$

(1)　線形システム

入力 $x_1(t), x_2(t)$　出力 $y_1(t), y_2(t)$ について

$x_1(t) \rightarrow y_1(t), \quad x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

の関係が成立するとき、任意の定数を a, b として、

$a\, x_1(t) + b\, x_2(t) \rightarrow a\, y_1(t) + b\, y_2(t)$

(2)　時不変システム

$x(t) \rightarrow y(t)$

のとき、任意の定数を τ として、

$x(t-\tau) \rightarrow y(t-\tau)$

$$x(t) \Rightarrow y(t)$$

図4-1: 線形時不変システム.

ここで，システム G における入力 $x_1(t), x_2(t)$，出力 $y_1(t), y_2(t)$ が以下の関係を満たす場合，システム G を線形システムと言う．ここで a, b は定数である.

$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t)$$
$$x_2(t) \Rightarrow y_2(t)$$
$$a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$$

また，システム G における入力 $x(t)$，出力 $y(t)$ が以下の関係を満たす場合，システム G を時不変システムと言う．ここで τ は定数である．

$$x(t) \Rightarrow y(t)$$
$$x(t-\tau) \Rightarrow y(t-\tau)$$

時変システムの例

$$y(t) = \sin(2\mathrm{t})\,x(t)$$

条件をチェック $\boxed{y(t-\tau) = S\{u(t-\tau)\}}$

$$y(t-\tau) = \sin[2(t-\tau)]\,x(t-\tau)$$

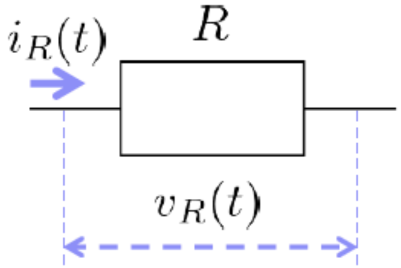
$$S\{x(t-\tau)\} = \sin(2\mathrm{t})\,x(t-\tau)$$

⇒ 時変

電気回路の基本素子

抵抗の両端電圧は，
流れる電流に比例する

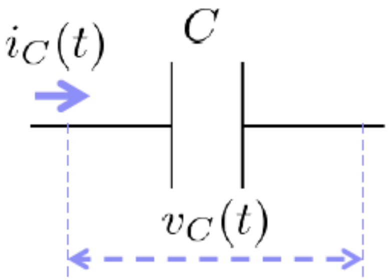
- 抵抗



$$v_R(t) = R i_R(t)$$

コンデンサの両端電圧は，
蓄えた電流（電流の累積・積分）に
比例する

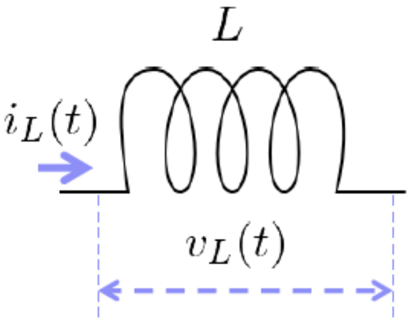
- コンデンサ



$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C} i_C(t)$$

- コイル



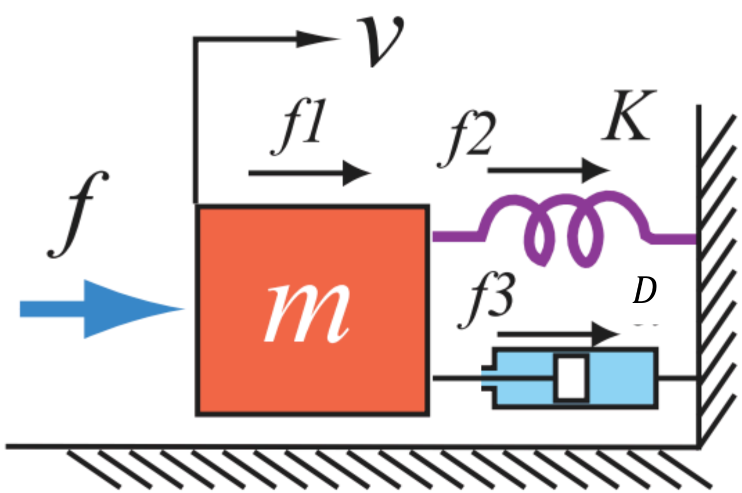
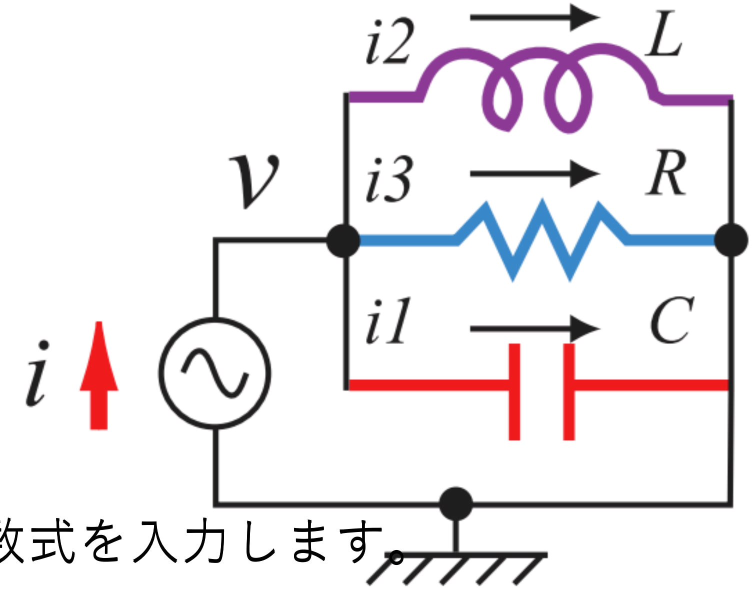
$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

コイルの両端電圧は，
流れる電流の変化
（電流の微分）に比例する

機械回路の記号解析

下　条　　　誠

2010 年 8 月版

機械系	電気系
	
力の平衡から $f = f1 + f2 + f3$ $f = m\frac{dv}{dt} + Dv + \mathrm{K}\int v\,dt$	キルヒホッフの電流保存則 (KCL) から $f = i1 + i2 + i3$ $i = C\frac{dV}{dt} + \frac{1}{R}\mathrm{V} + \frac{1}{L}\int V\,dt$

ここに数式を入力します。

$$f = m\frac{d^2x}{dt^2} + D\frac{dx}{dt} + \mathrm{K}x \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

電気系と機械系における相似回路

$$i_3 = \frac{1}{L}\int V\,dt$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}V$$

$$i = nev = neat = ne\frac{F}{m}t = ne\frac{Ee}{m}t = ne\frac{\frac{V}{d}e}{m}t = ne^2\frac{V}{md}t$$

$$\frac{di}{dt} = ne^2\frac{V}{md} = \frac{ne^2}{md}V = \frac{1}{md/ne^2}V = \frac{1}{L}V \qquad L = \frac{md}{ne^2}$$

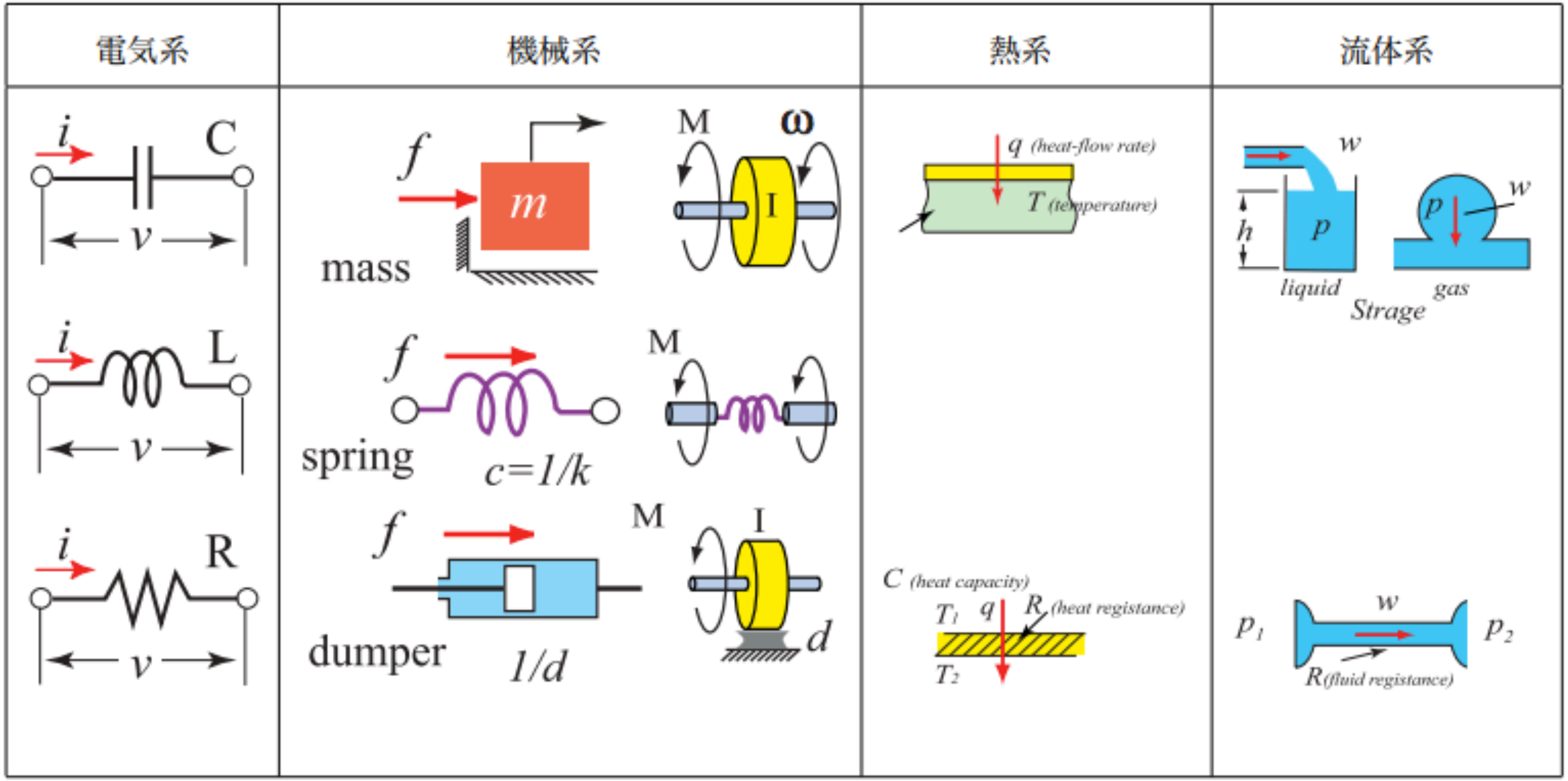
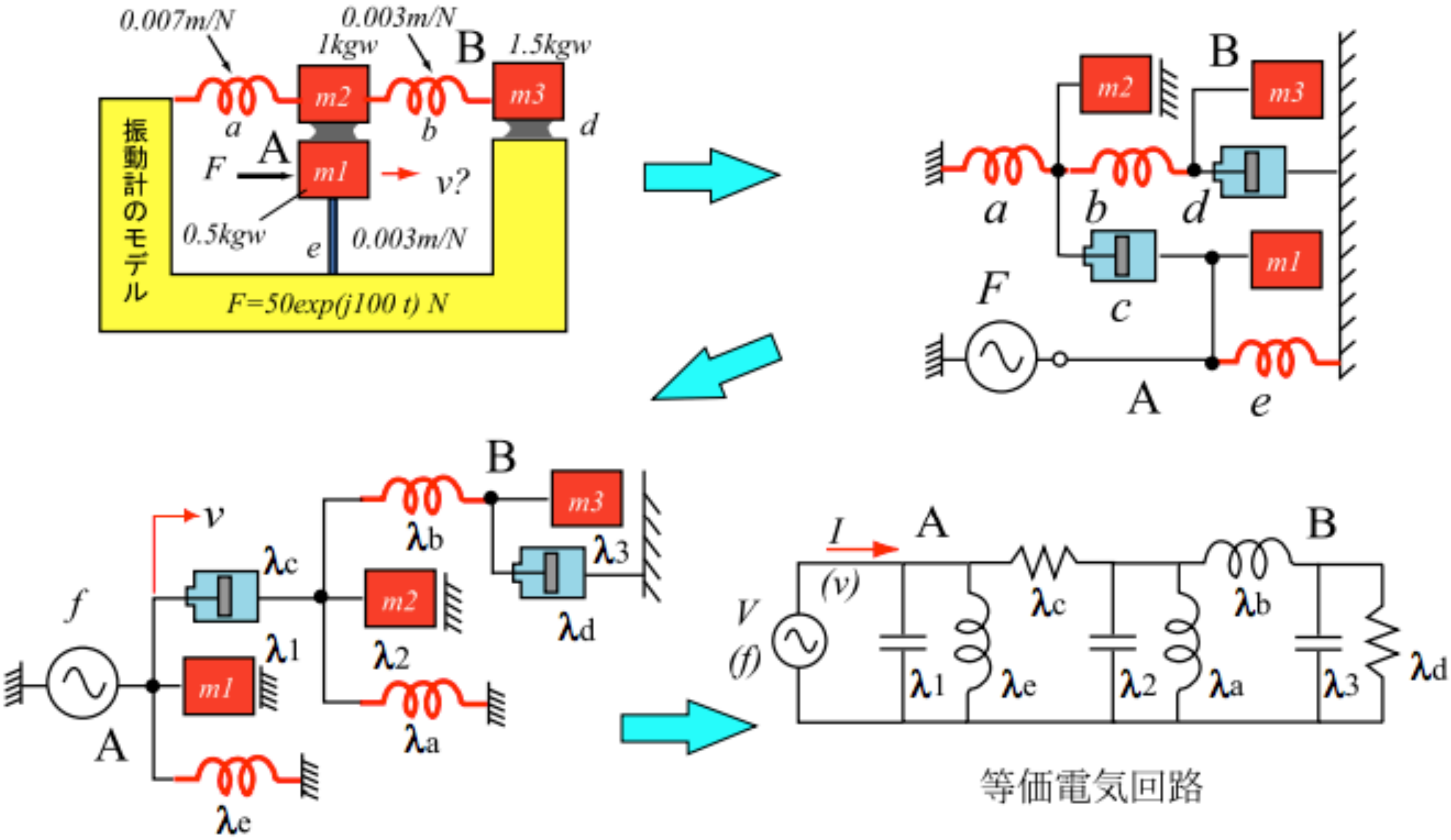


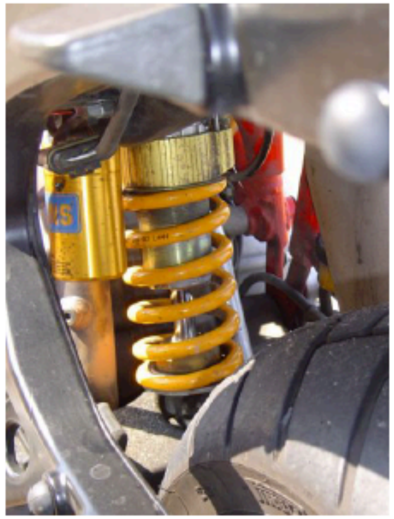
図 1.3: いろいろな物理系における各要素の相似関係



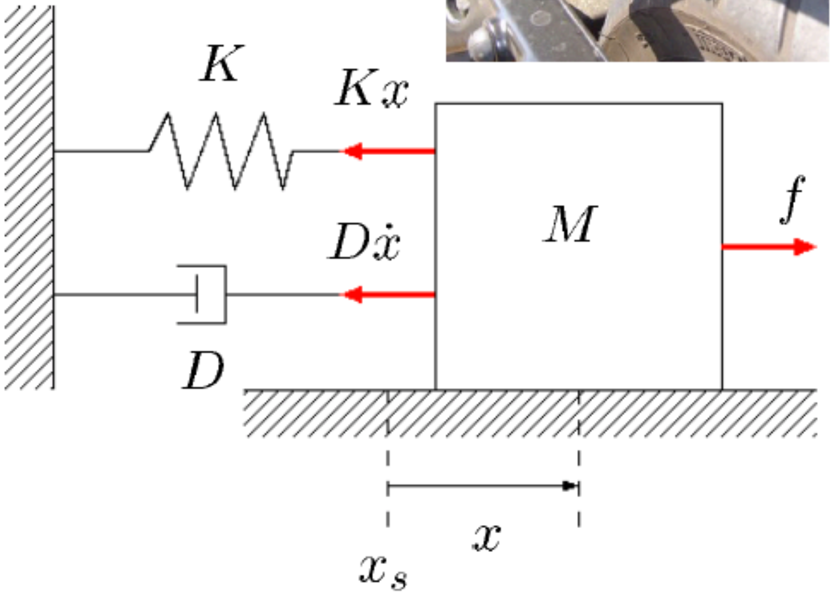
0.007m/N
1kgw
0.003m/N
B
1.5kgw
m2
m3
a
b
d
A
F
m1
v?
0.5kgw
e
0.003m/N
振動計のモデル
F=50exp(j100 t) N
B
m2
m3
a
b
d
c
m1
F
A
e
B
v
m3
λb
λ3
λc
m2
λd
f
λ1
λ2
m1
A
λa
λe
I
A
B
(v)
λc
λb
V
(f)
λ1
λe
λ2
λa
λ3
λd
等価電気回路

サスペンションのモデル

- 路面の凹凸を吸収し，車などの乗り心地の向上に寄与
- バネとダンパ（衝撃を抑制）で構成



x	平衡状態 x_s からの変位 [m]
K	ばね定数　[N/m]
D	ダッシュポットの摩擦係数　[N/m/sec]
M	物体の質量　[kg]
f	物体に働く力　[F]



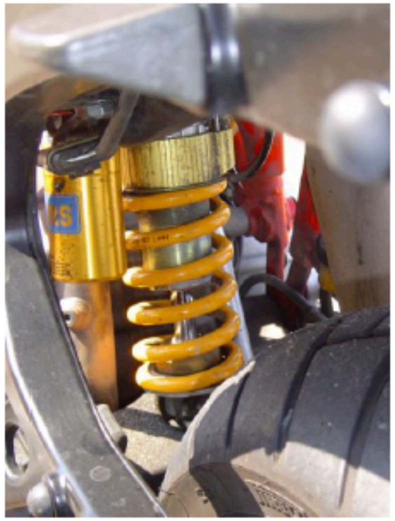
サスペンションのモデル

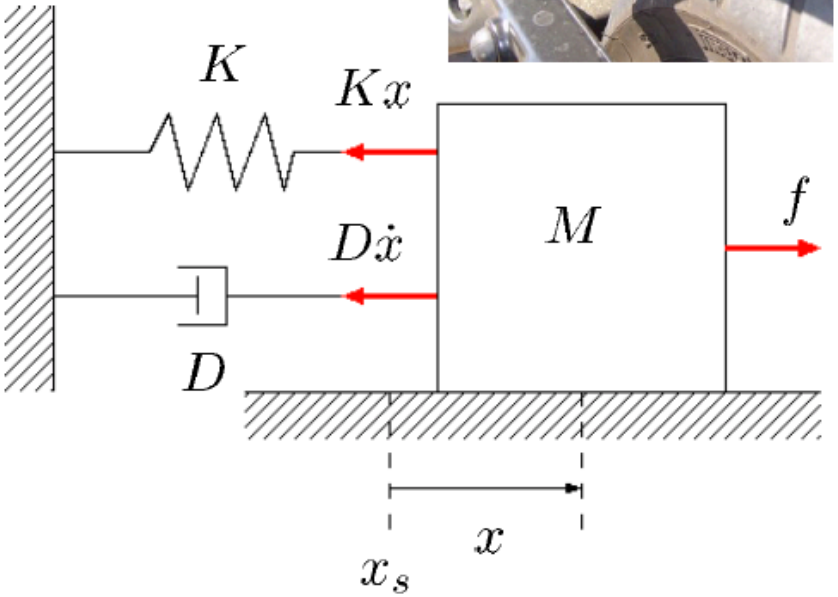
- 路面の凹凸を吸収し，車などの乗り心地の向上に寄与
- バネとダンパ（衝撃を抑制）で構成
  - ニュートンの第二法則

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -D\frac{dx}{dt} - Kx + f$$

  - 物体に加わる力を**入力**，
    物体の変位を**出力**としたモデル

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + D\frac{dx}{dt} + Kx = f$$

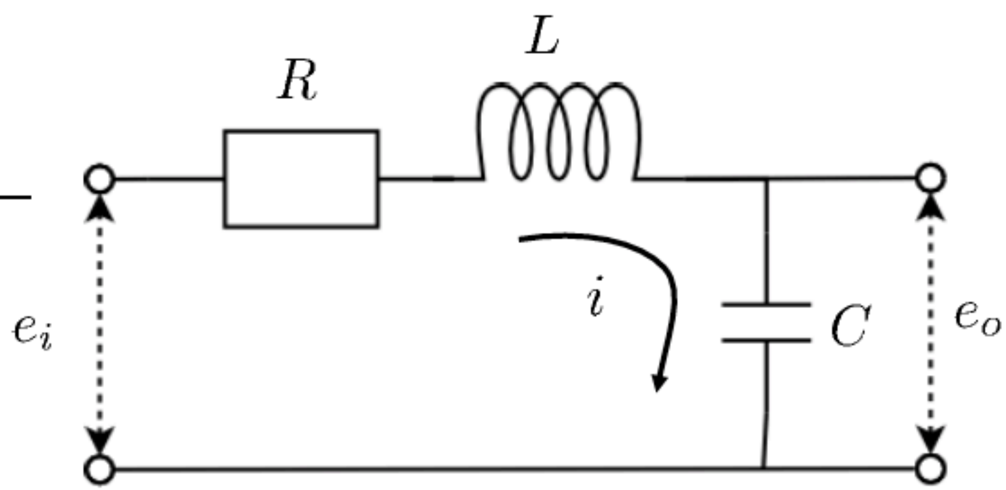




RLC回路のモデル

- 回路のパラメータ

e_i	入力電圧 [V]
e_o	出力電圧（コンデンサの両端電圧） [V]
i	回路に流れる電流 [A]
R	抵抗 [Ω]
C	コンデンサの容量 [F]
L	コイルのインダクタンス [H]



RLC回路のモデル

$$\frac{de_0}{dt} = \frac{1}{C} i$$

- 電気的な諸法則
  - オームの法則

    $$Ri = v_R$$

  - ファラディの法則

    $$L\frac{di}{dt} = v_L$$

  - クーロンの法則

    $$\frac{1}{C}\int idt = v_C$$

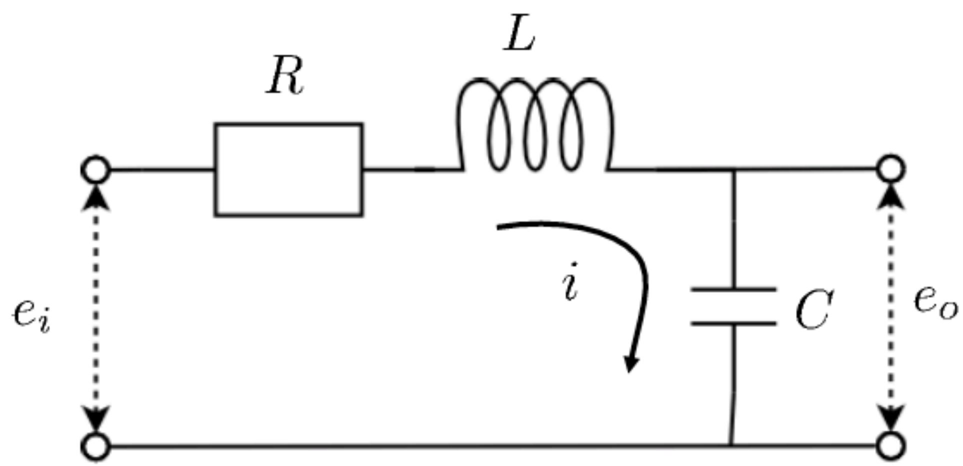
  - キルヒホッフの法則

    $$e_i = v_R + v_L + v_C$$

$$C\frac{de_0}{dt} = i$$

- RLC回路のモデル

$$LC\frac{d^2e_o}{dt^2} + RC\frac{de_o}{dt} + e_o = e_i$$



$$C\frac{de_0}{dt} = i$$

$$V_R = Ri = RC\frac{de_0}{dt}$$

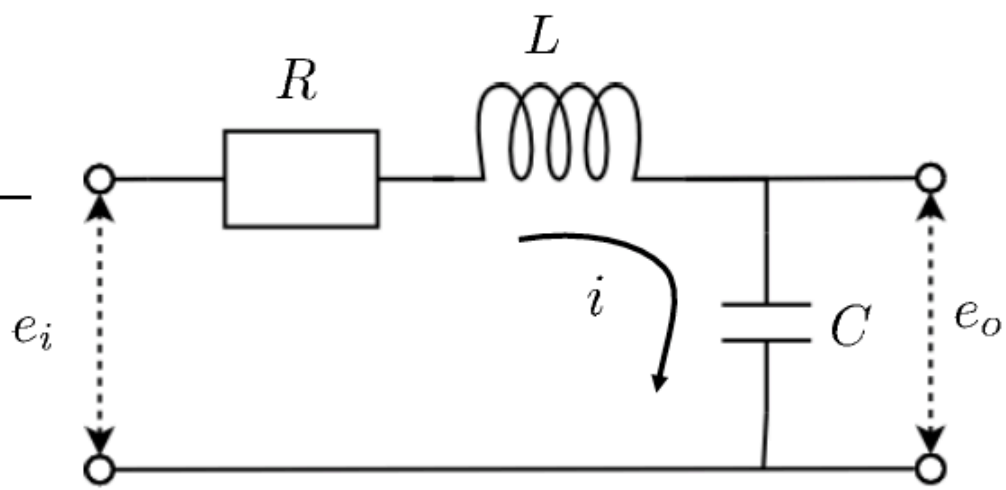
$$V_L = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2e_0}{dt^2}$$

- 熱プロセス $$RC\frac{d\theta}{dt}+\theta=Rq_s$$
- RC回路 $$RC\frac{de_o}{dt}+e_o=e_i$$
- 機械振動系 $$M\frac{d^2x}{dt^2}+D\frac{dx}{dt}+Kx=f$$
- RLC回路 $$LC\frac{d^2e_o}{dt^2}+RC\frac{de_o}{dt}+e_o=e_i$$

RLC回路のモデル

- 回路のパラメータ

e_i	入力電圧 [V]
e_o	出力電圧（コンデンサの両端電圧） [V]
i	回路に流れる電流 [A]
R	抵抗 [Ω]
C	コンデンサの容量 [F]
L	コイルのインダクタンス [H]



RLC回路のモデル

$$\frac{de_0}{dt} = \frac{1}{C} i$$

- 電気的な諸法則
  - オームの法則

    $$Ri = v_R$$

  - ファラディの法則

    $$L\frac{di}{dt} = v_L$$

  - クーロンの法則

    $$\frac{1}{C}\int idt = v_C$$

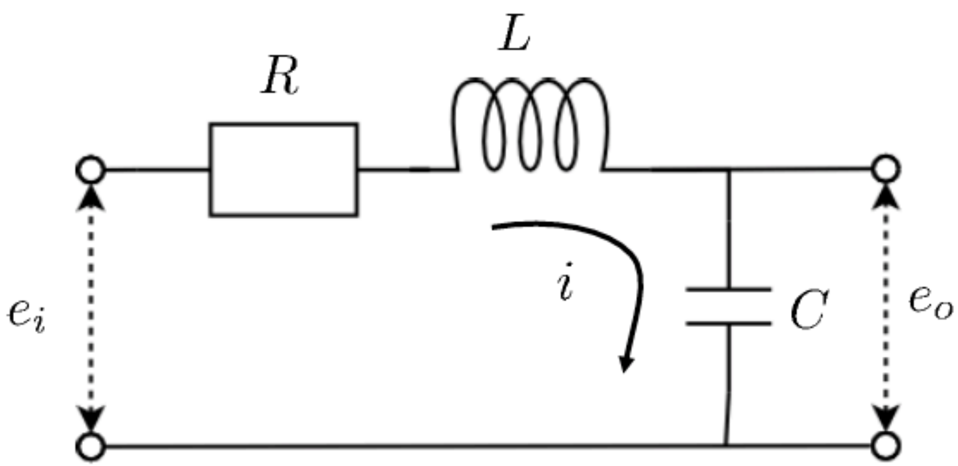
  - キルヒホッフの法則

    $$e_i = v_R + v_L + v_C$$

$$C\frac{de_0}{dt} = i$$

- RLC回路のモデル

  $$LC\frac{d^2e_o}{dt^2} + RC\frac{de_o}{dt} + e_o = e_i$$



$$C\frac{de_0}{dt} = i$$

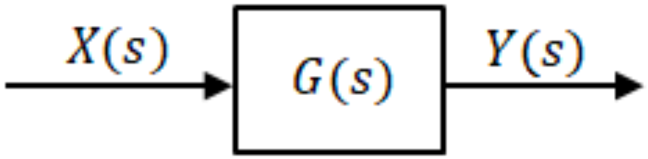
$$V_R = Ri = RC\frac{de_0}{dt}$$

$$V_L = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2e_0}{dt^2}$$

- 熱プロセス $$RC\frac{d\theta}{dt}+\theta=Rq_s$$
- RC回路 $$RC\frac{de_o}{dt}+e_o=e_i$$
- 機械振動系 $$M\frac{d^2x}{dt^2}+D\frac{dx}{dt}+Kx=f$$
- RLC回路 $$LC\frac{d^2e_o}{dt^2}+RC\frac{de_o}{dt}+e_o=e_i$$

伝達関数とはシステムの入力と出力の関係を表現したもので、伝達関数をG(s)、入力をX(s)、出力をY(s)としたとき、以下の様に定義されます。

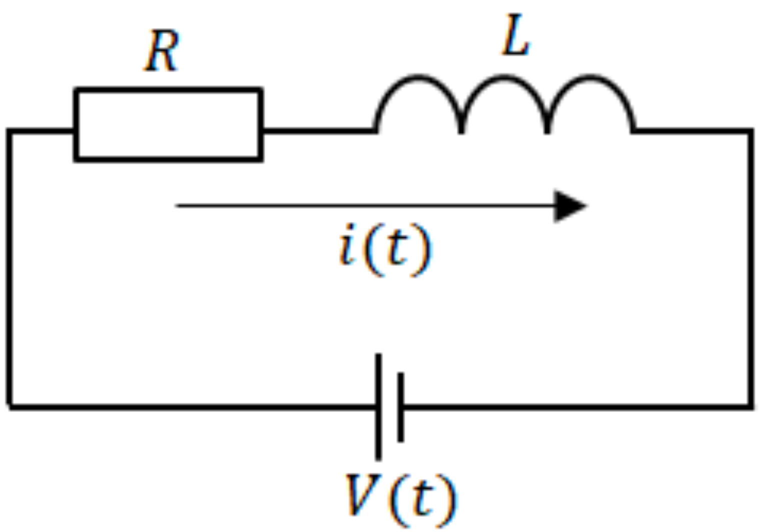
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$



伝達関数の求め方は、まずシステムの微分方程式を求めます。そこからラプラス変換しs関数で表現し、出力と入力の比を取れば求まります。

システム $\longrightarrow$ 微分方程式 $\xrightarrow{\text{ラプラス変換}}$ s関数 $\xrightarrow{\text{入出力の比}}$ 伝達関数

以下RL回路の例について考えてみます。RL回路の詳細はこちら。



$$V(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

上式をラプラス変換します。

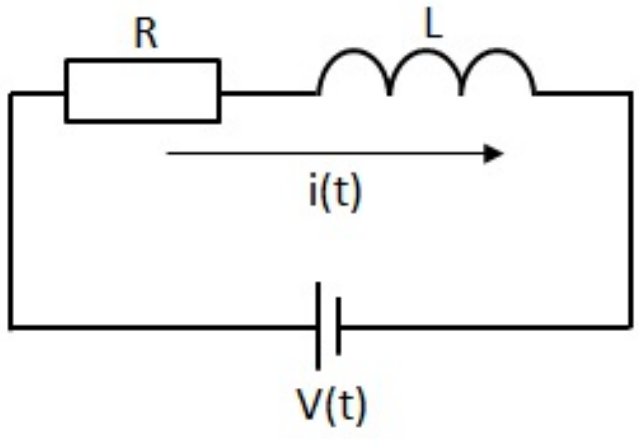
$$\begin{aligned} V(s) &= RI(s) + LsI(s) \\ &= (R + Ls)I(s) \end{aligned}$$

より、

$$\boxed{\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R + Ls}}$$

となり、伝達関数を求めることが出来ました。

現代制御で扱う状態方程式の求め方を、1次システムである以下RL回路を用いて説明します。1次システムとは1階微分の微分方程式で挙動が記述できるシステムの事で、 一般的にn次システムとはn階微分の微分方程式となります。



微分方程式を立てる

状態方程式を求めるには先ずは微分方程式を解く必要があります。 入力をV(t)と電流i(t)の関係は以下式で表すことが出来ます。RL回路の詳細についてこちらで説明。

$$V(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \cdots (1)$$

■状態方程式, 出力方程式

先ず状態方程式と出力方程式の一般式は以下となります

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + bu(t)$$ 状態方程式

$$y(t) = cx(t)$$ 出力方程式

u(t):入力変数, A: 状態マトリクス
b: 入力行列, c: 出力行列

これを上記例に照らし合わせてみます。(1)式を変形すると以下。

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}V(t)$$

上式を行列式で表した形が以下状態方程式となります。ＡとＢはそれぞれ上記一般式のＡ,Bにあたります

$$\frac{d}{dt}[i(t)] = \overset{A}{\left[-\frac{R}{L}\right]}[i(t)] + \overset{B}{\left[\frac{1}{L}\right]}V(t)$$

また出力方程式は以下となり、i(t)に対してCをかけたものを出力y(t)と定義します。今回の場合は出力をi(t)としたためC=1となっていますが、 i(t)に対してある関係を持つ別のパラメータを出力y(t)と定義してもよく、Cは必ずしも物理式からではなく実機から求めた値を設定してもよいです。

$$y(t) = \overset{C}{[1]}[i(t)]$$

こうしてみると、わざわざ行列で表現する必要性が解らないと思われます。確かにこの様な簡単な式の場合ではそう思うかもしれませんが、 2次システムになったり複雑な式になると便利さが解ってきます。

[例 2.11] RLC 回路

$$LC\frac{d^2e_o(t)}{dt^2} + RC\frac{de_o}{dt} + e_o(t) = e_i(t)$$

$e_i(t)$:入力

$e_o(t)$:出力

ラプラス変換

$$E_i(s) = \mathcal{L}[e_i(t)]$$

$$E_o(s) = \mathcal{L}[e_o(t)]$$

(すべての初期値$=0$)

$$LCs^2E_o(s) + RCsE_o(s) + E_o(s) = E_i(s)$$

$$\left(LCs^2 + RCs + 1\right)E_o(s) = E_i(s)$$

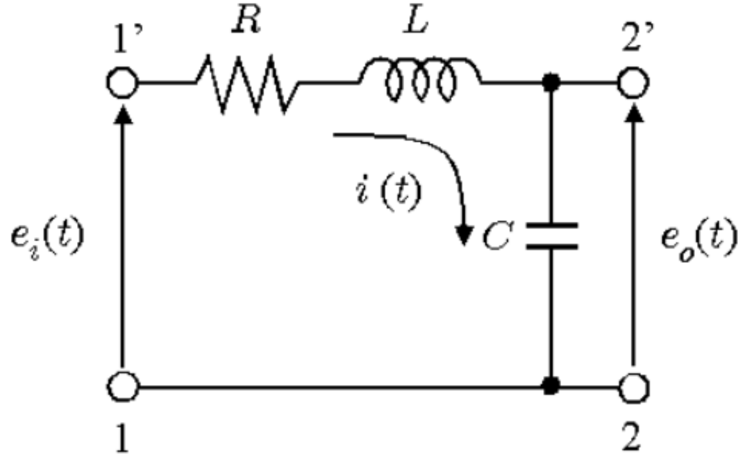


図 2.4 RLC回路

伝達関数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

	ラプラス変換前	ラプラス変換後
①	$f(t)$	$F(s)$
②	$a\,(t>0)$	$\frac{a}{s}$
③	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)-x(0)$
④	$\int_0^\infty x(t)dt$	$\frac{1}{s}X(s)$
⑤	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$