システムの表現

予備知識

電気回路の双対性

双対性

電気回路では法則や記述などが多くの場合、二つずつ対をなして現れる。例えば、電圧と電流、抵抗とコンダクタンス、並列と直列などがそれに当たり、このような対応関係にある概念は双対といわれる。

双対関係にある素子などの例

電圧　V	電流　I
インピーダンス　Z	アドミタンス　Y
抵抗　R	コンダンタンス　G
インダクタンス　L	キャパシタンス　C
リアクタンス　X	サセプタンス　B
電圧源　E	電流源　J

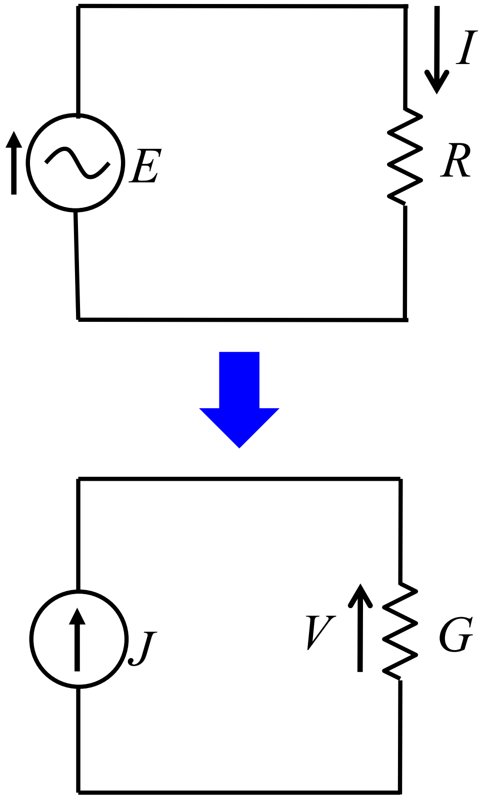
双対関係にある概念の例

直列接続	並列接続
短絡	開放
閉路	カットセット
Δ型接続	Y型接続
キルヒホッフの第2法則	キルヒホッフの第1法則

双対回路

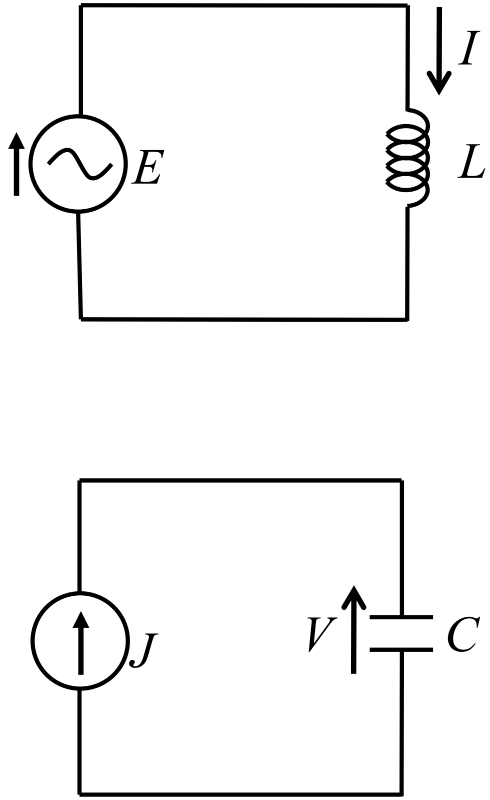
　ある電気回路に対して成立する関係式があるとき、その関係式に対して電圧と電流とを入れ替えた式もまた成立し、この新たな関係式を満足するような電気回路があるとき、このような2つの回路を互いに双対な回路という。

双対回路



$E = R\,I$

$J = G\,V$



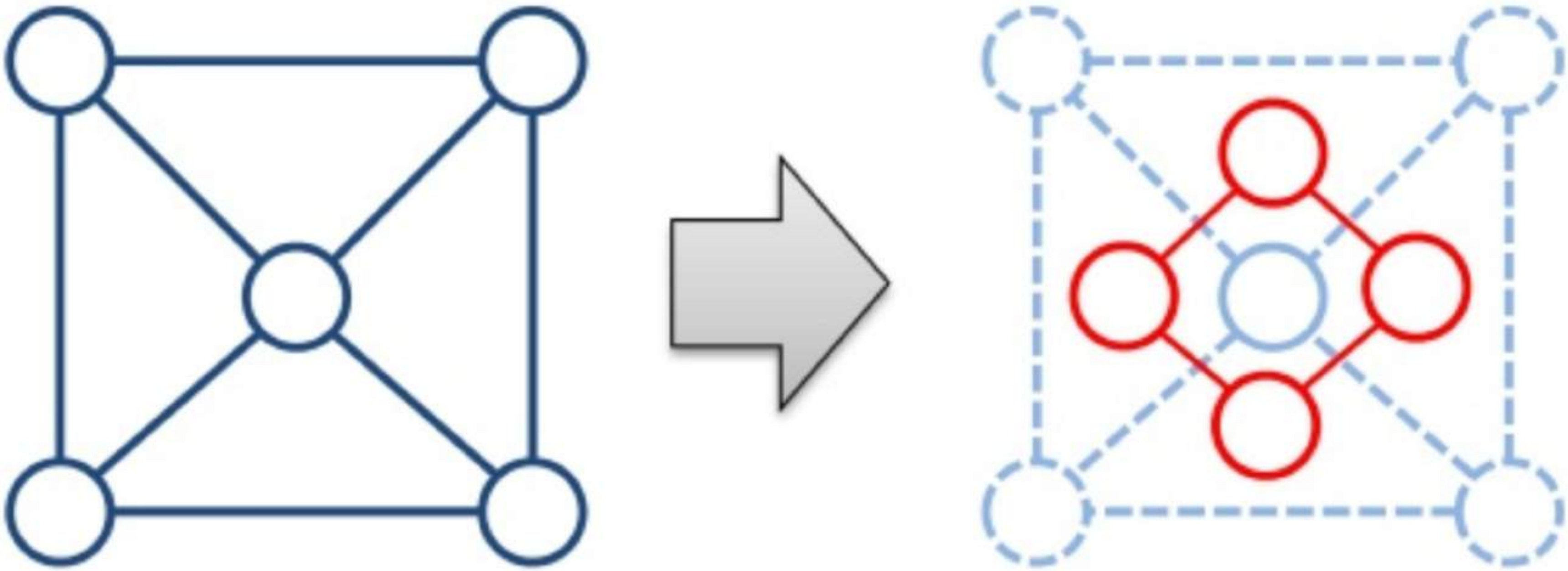
$E = j\omega L\, I$

$J = j\omega C\, V$

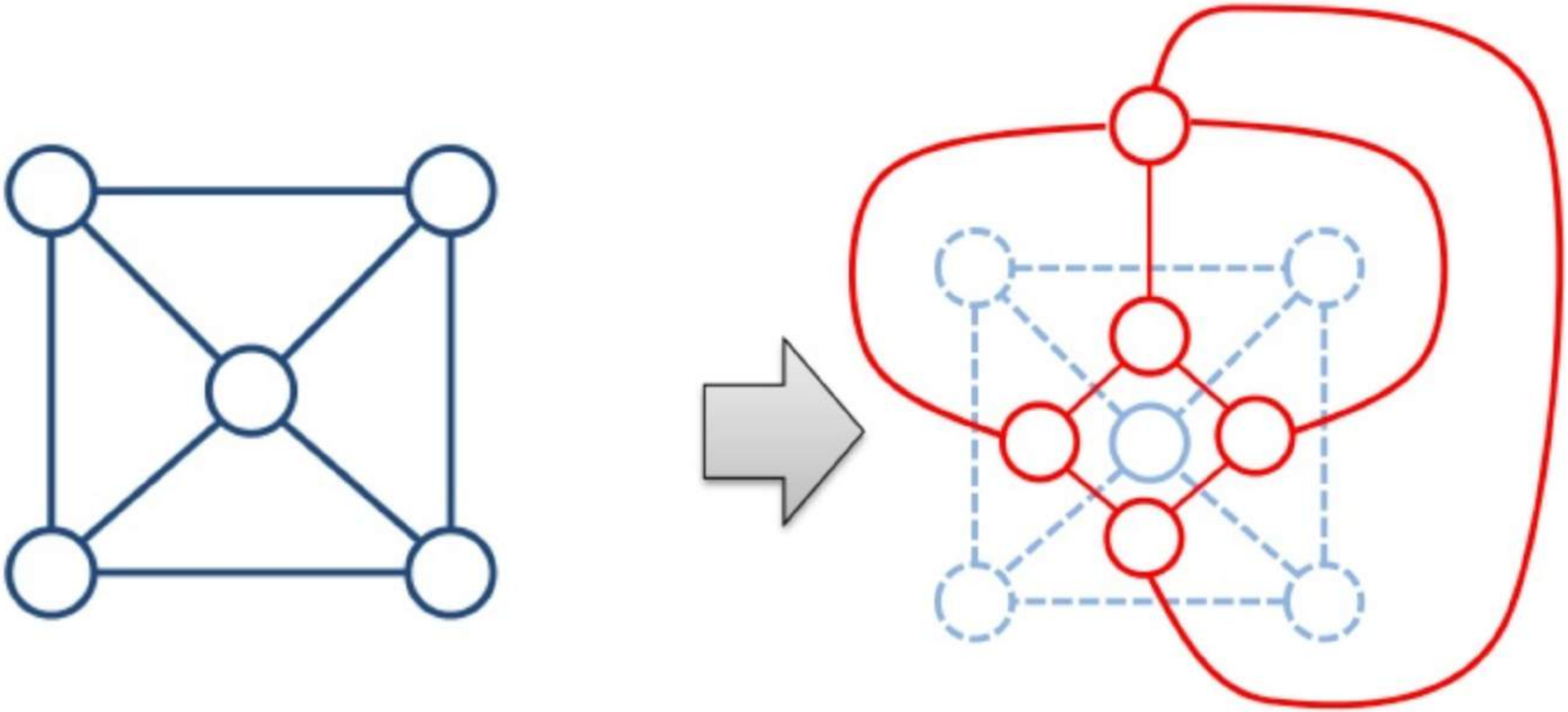
上の2つは双対回路

上の2つも双対回路

双対回路の作り方：正しくない方法

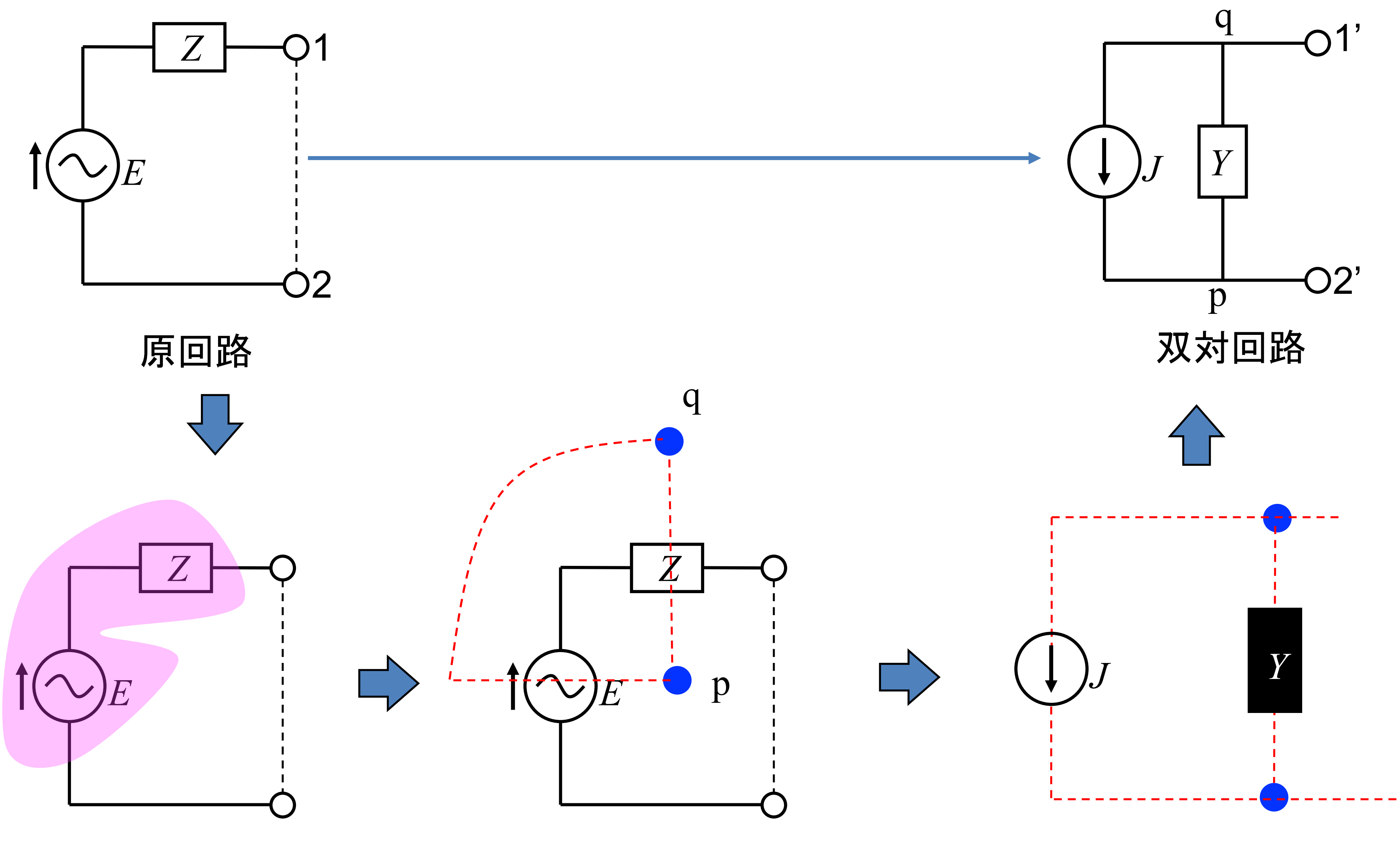


双対回路の作り方：正しい方法



双対回路の作り方

双対な回路を求めるには、まず双対グラフを求め、原グラフの枝と双対グラフの枝とが合い交わる枝同士で、素子をそれと双対な素子に入れ換えればよい。

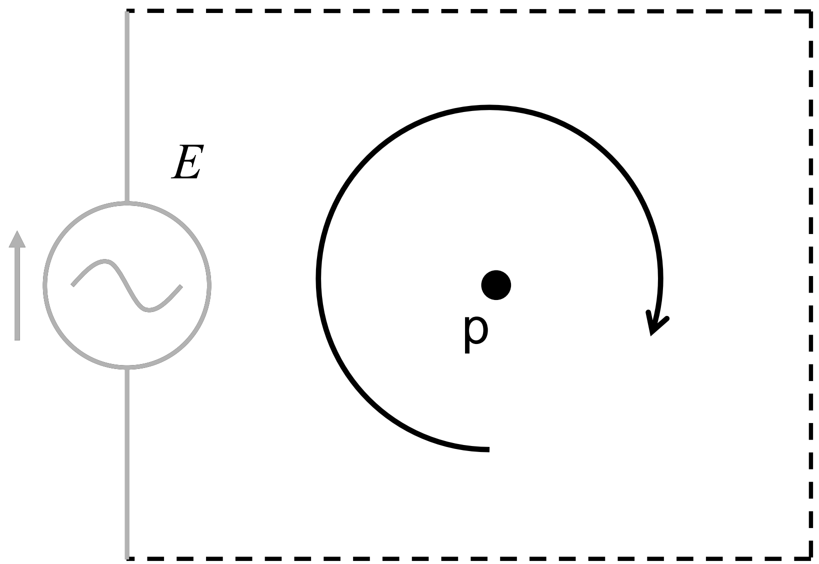


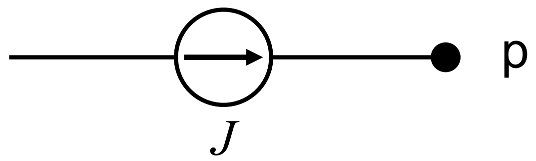
双対回路の作り方

電源など、極性のある素子の扱い

(a) 電圧源　→　電流源

　原回路で点 p を囲んで時計回りに電圧が上昇(降下)する電圧源なら、新回路では点 p の方向(点 p から出る方向)に電流を流す電流源になる

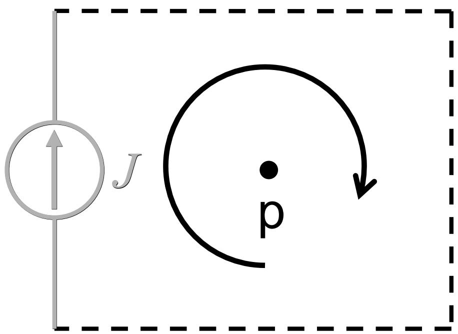


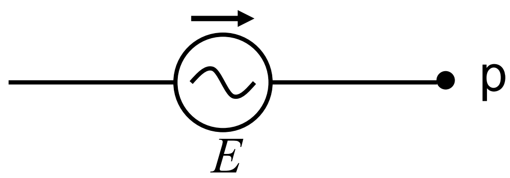


双対回路の作り方

(b) 電流源 → 電圧源

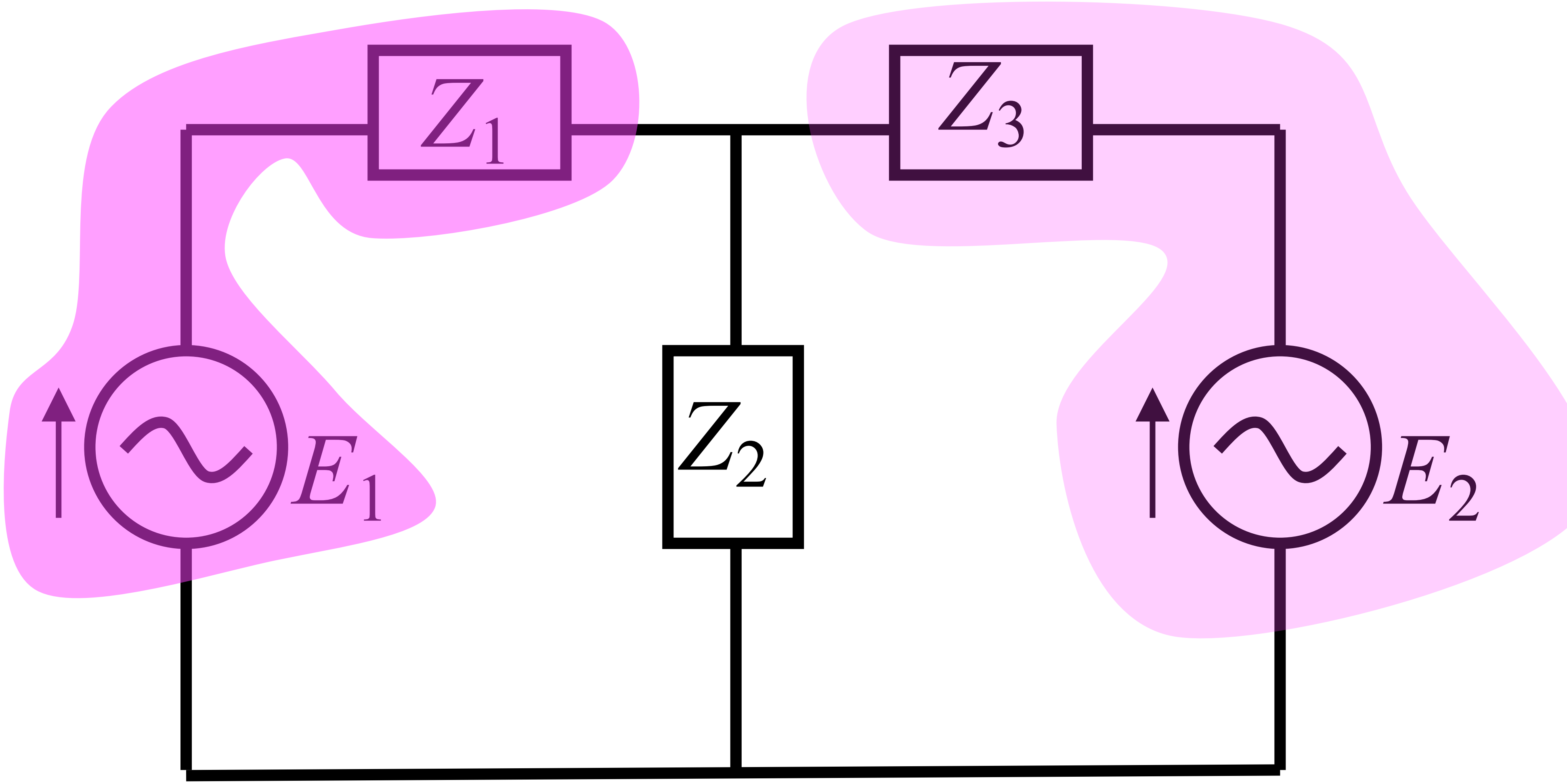
原回路で点 p を囲んで時計回りに(反時計回りに)電流を流す電流源なら、新回路では点 p の方向に電圧が上昇(降下)する電圧源になる





双対回路の作り方

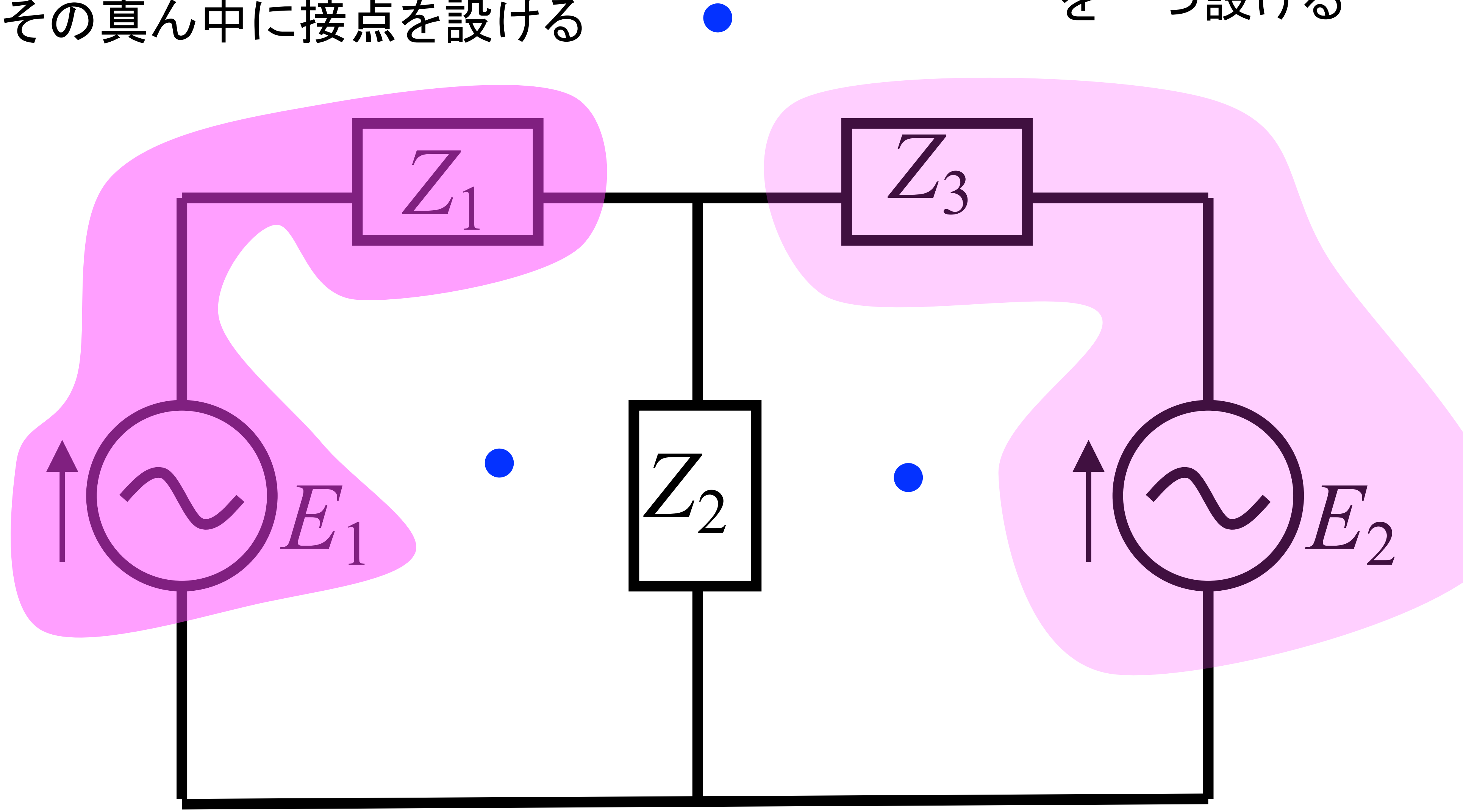
素子が直列、あるいは並列に接続されている部分、一つの素子としてまとめる



双対回路の作り方

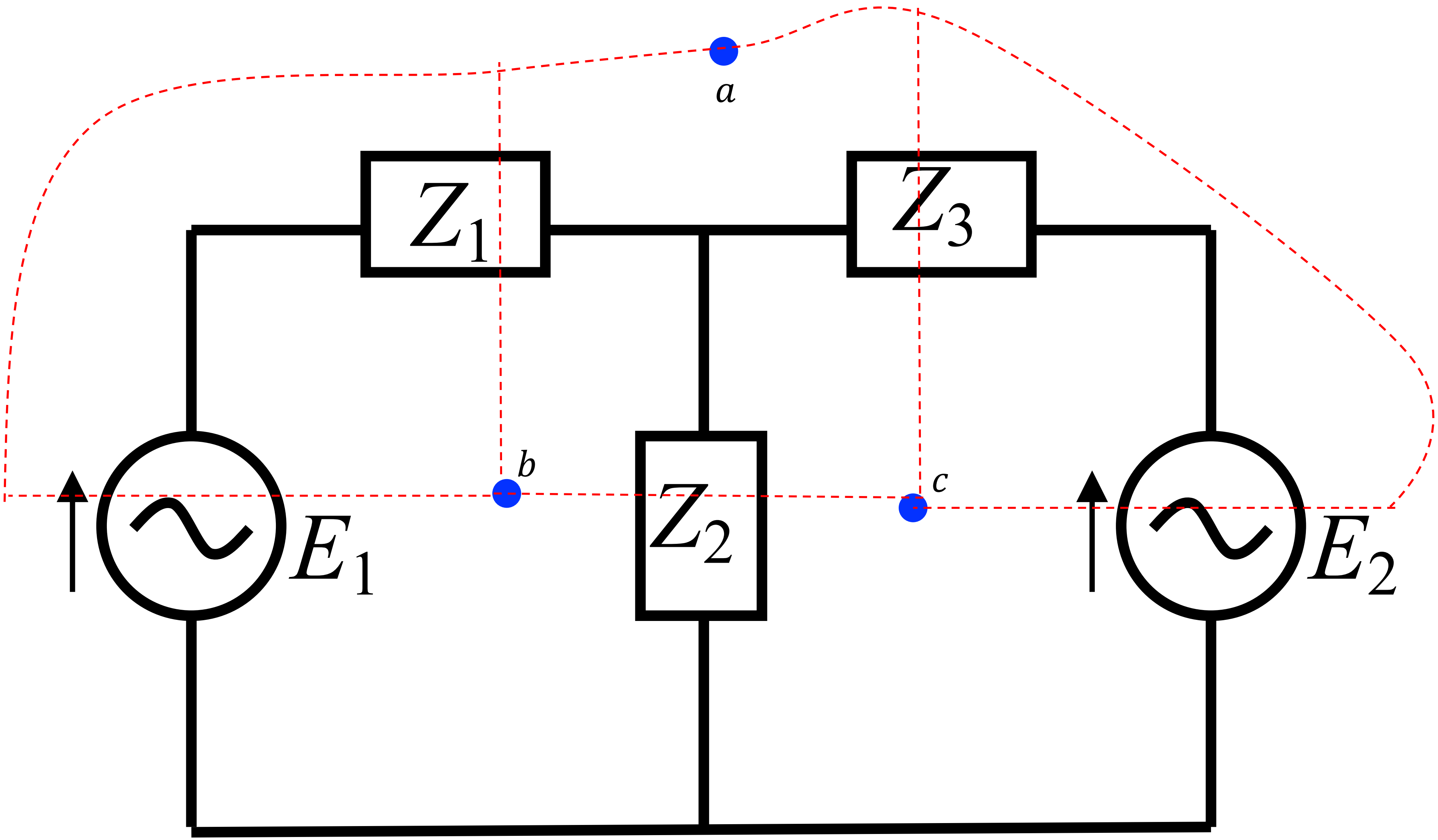
閉回路を作っている部分を探し、
その真ん中に接点を設ける

回路の外部に節点
を一つ設ける



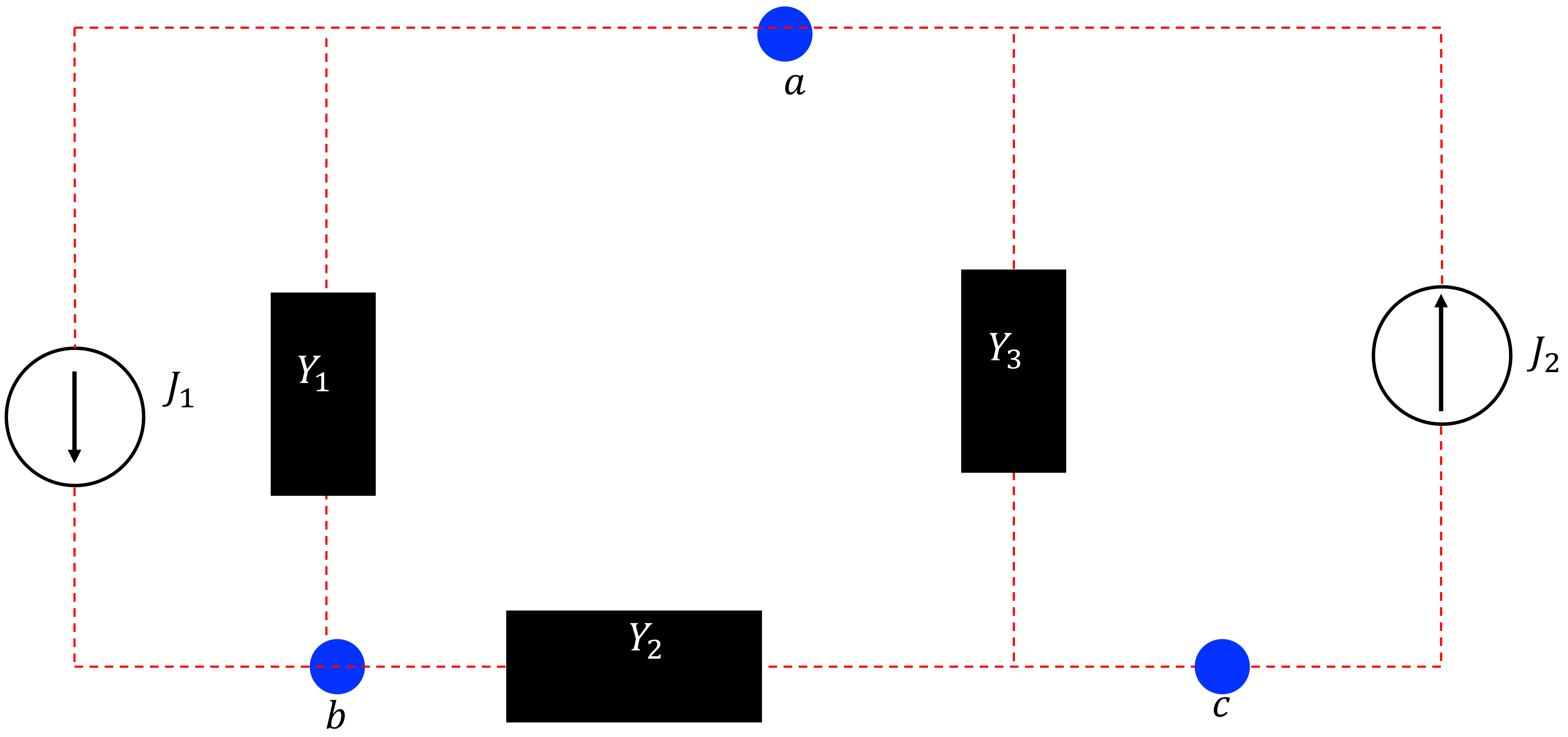
双対回路の作り方

まとめた素子は、ばらばらの素子に戻しておく。節点間を接続する破線はこれらの素子を一度だけ、かつすべて通るようにする



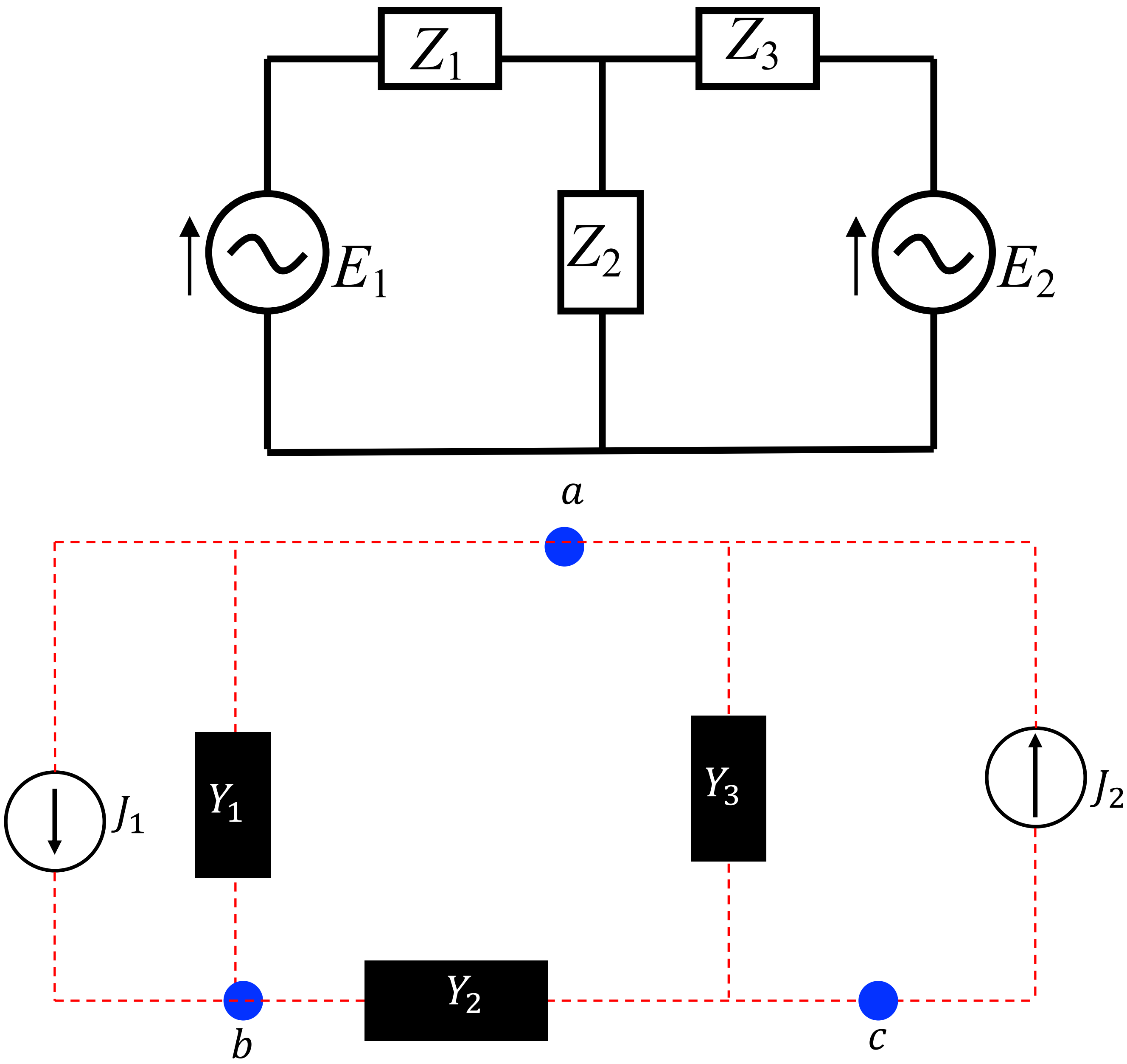
双対回路の作り方

素子位置を調整し、標準回路に戻しておく

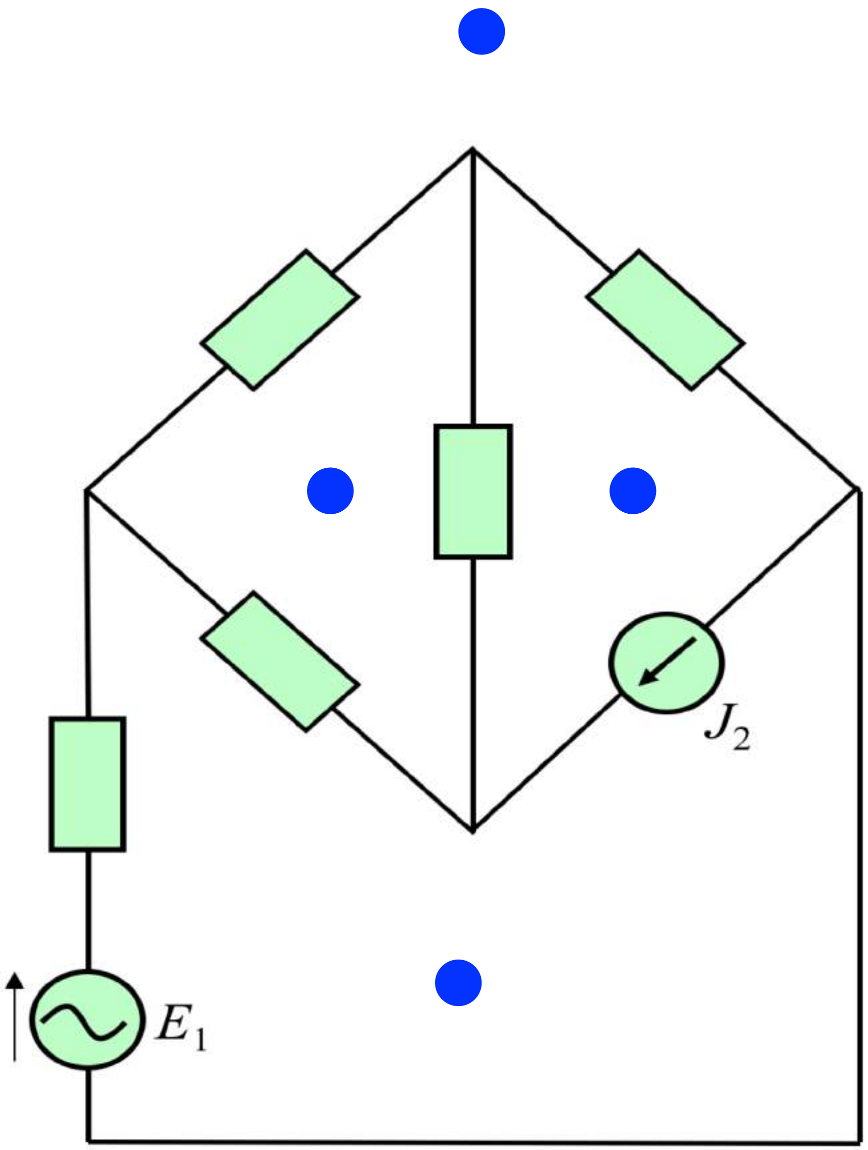


単位は変えるが、素子の数値自体は変えない。

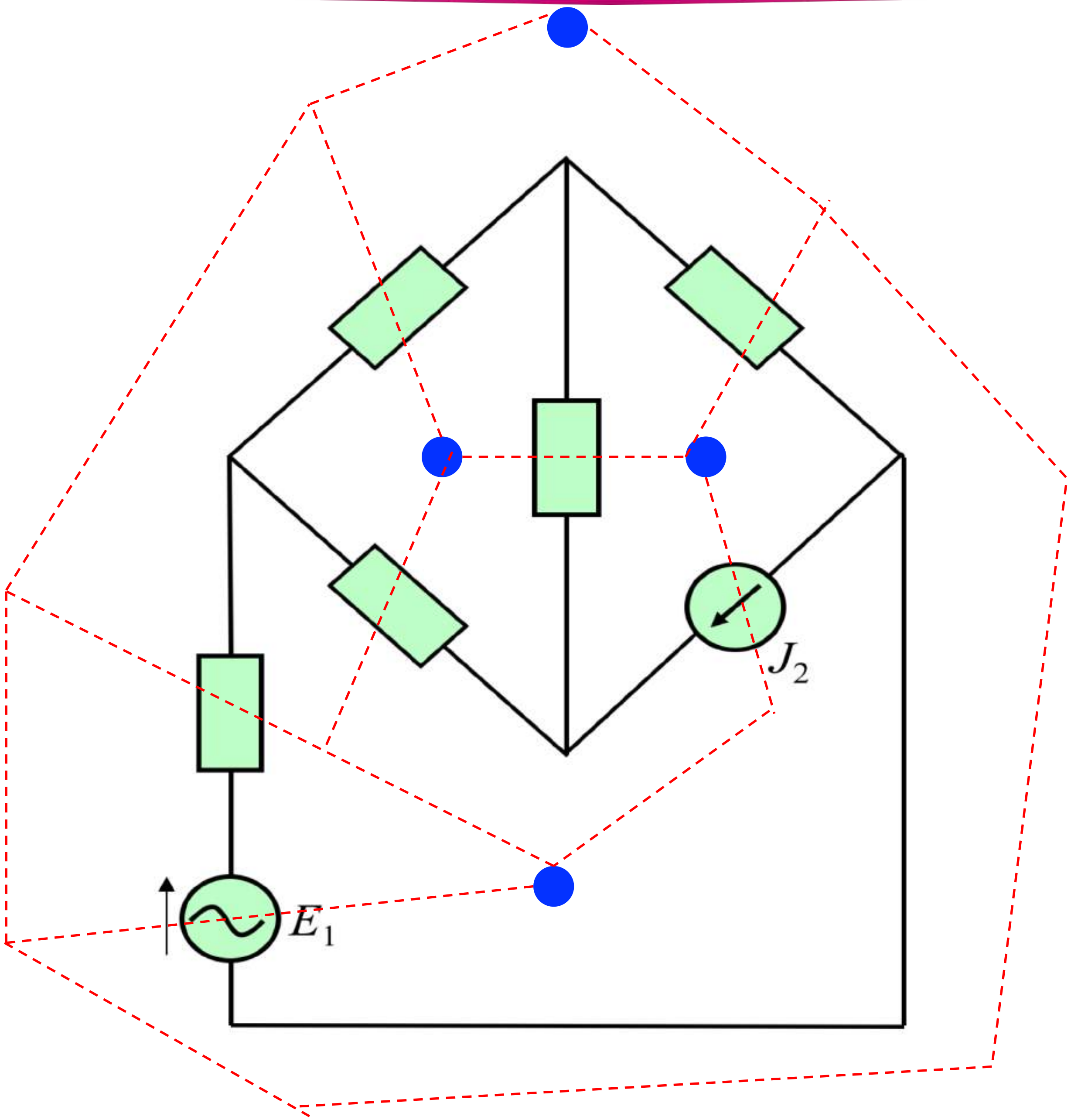
双対回路の作り方



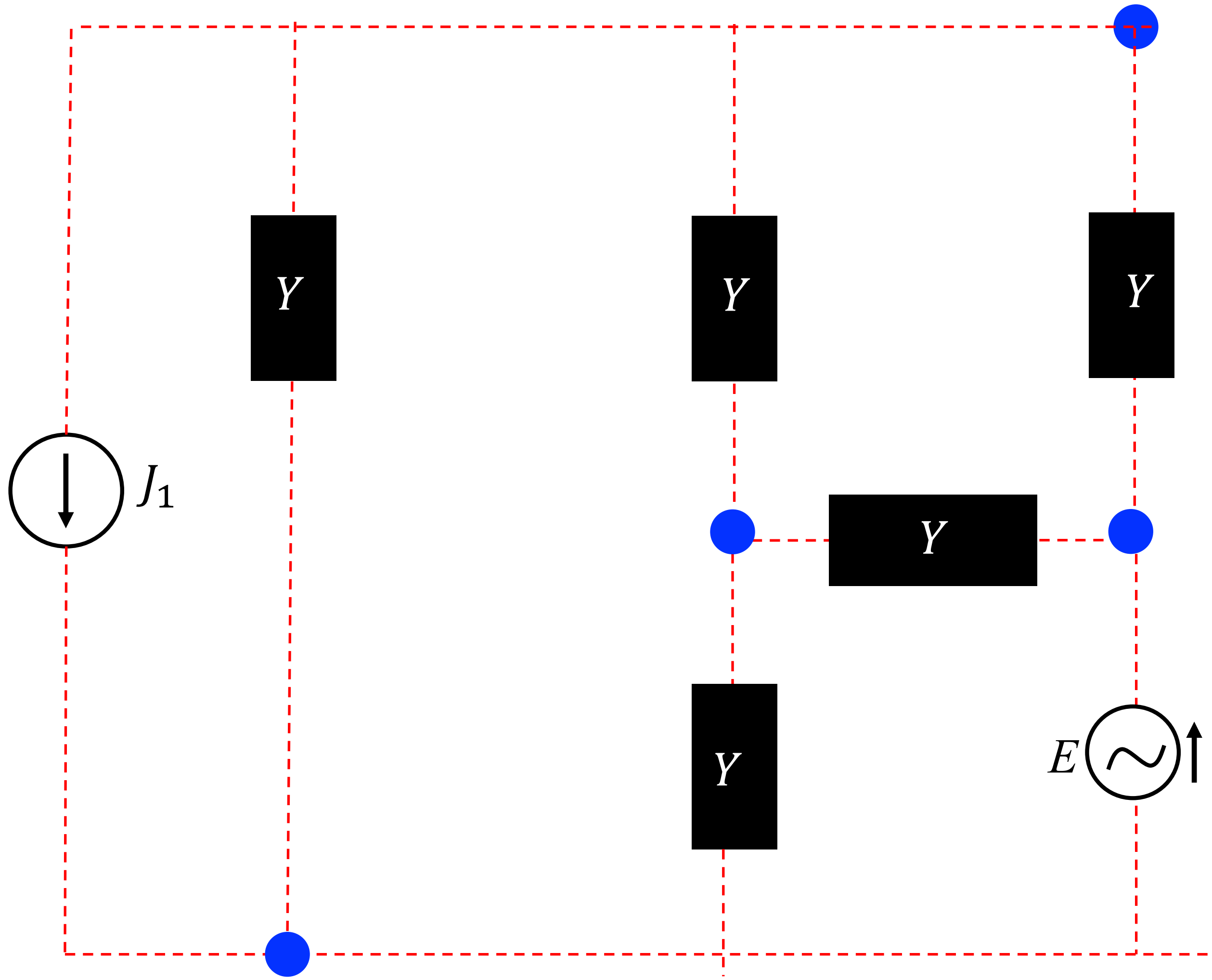
双対回路の作り方：練習



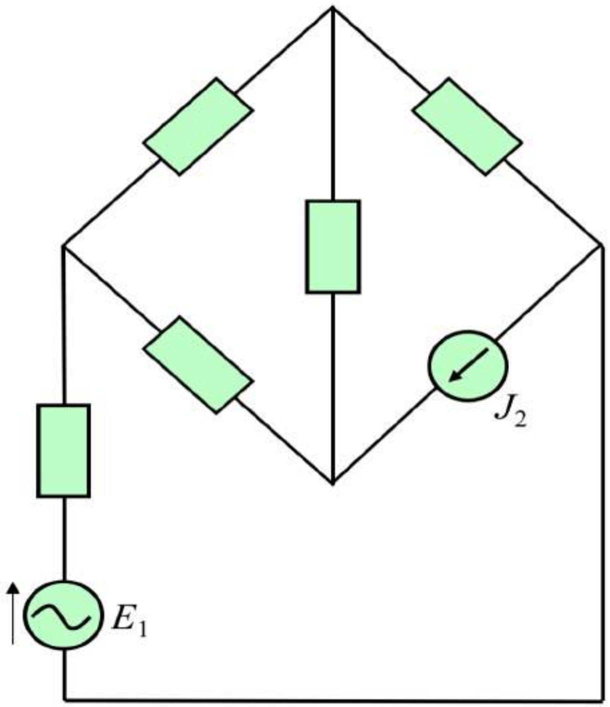
双対回路の作り方

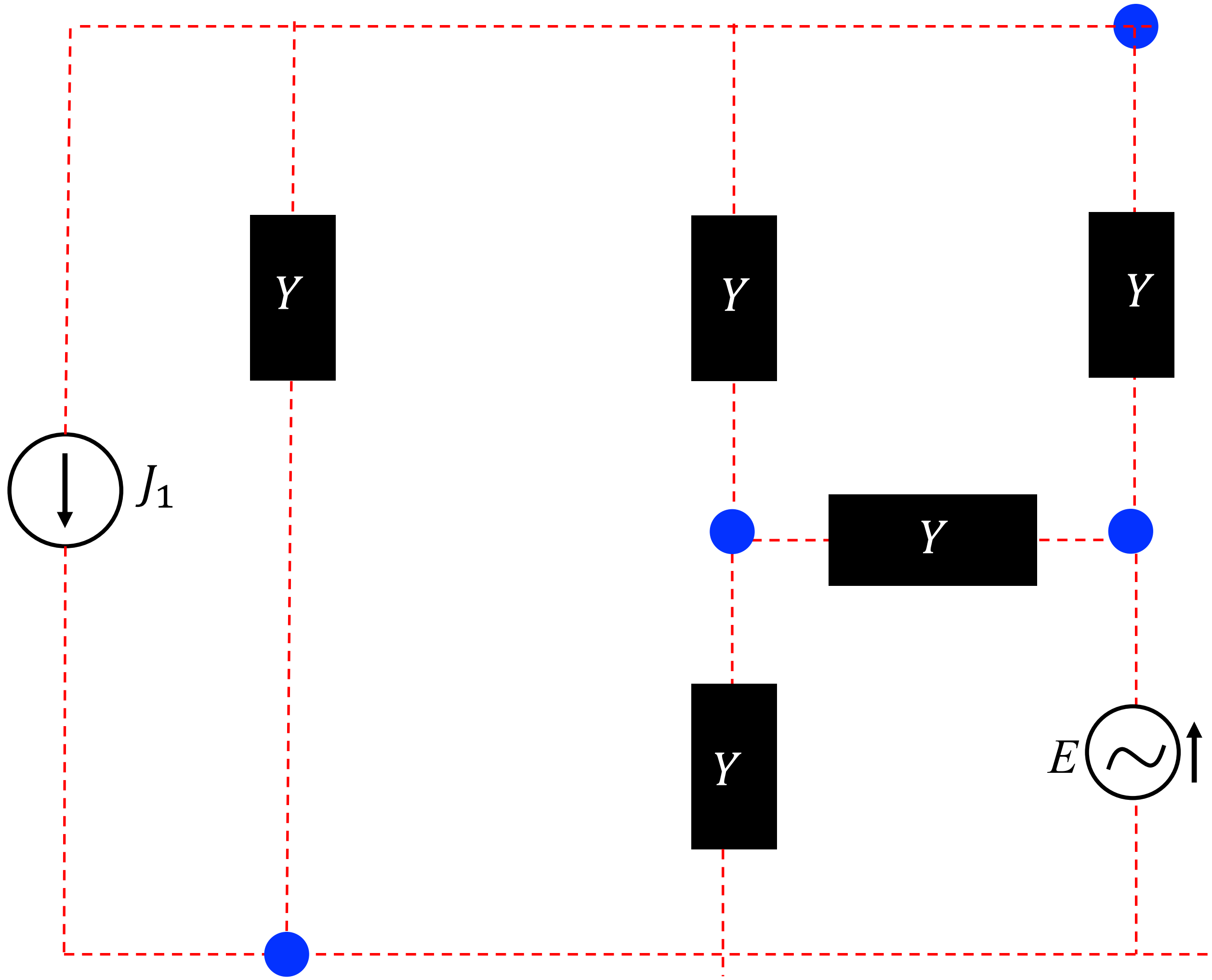


双対回路の作り方

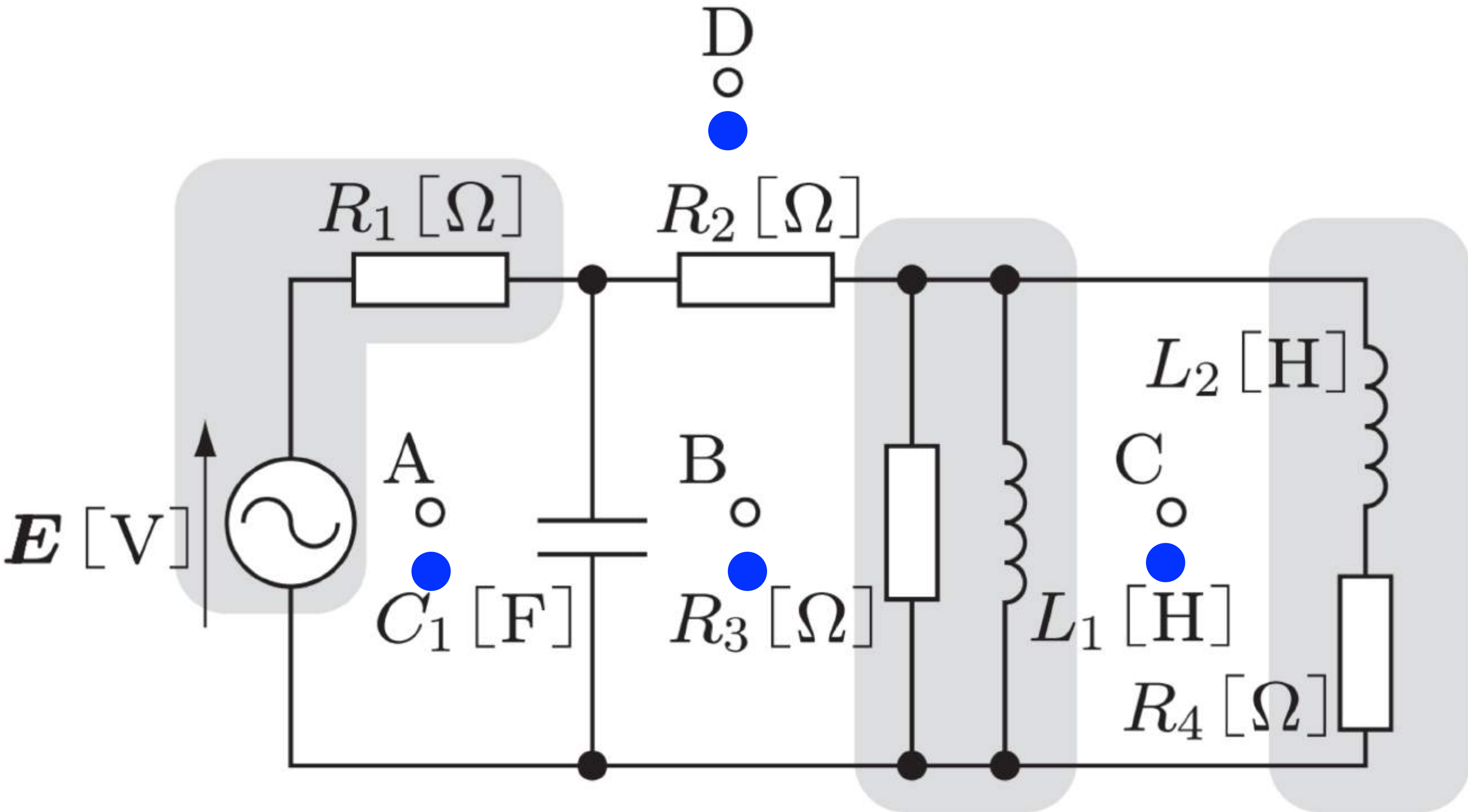


双対回路の作り方

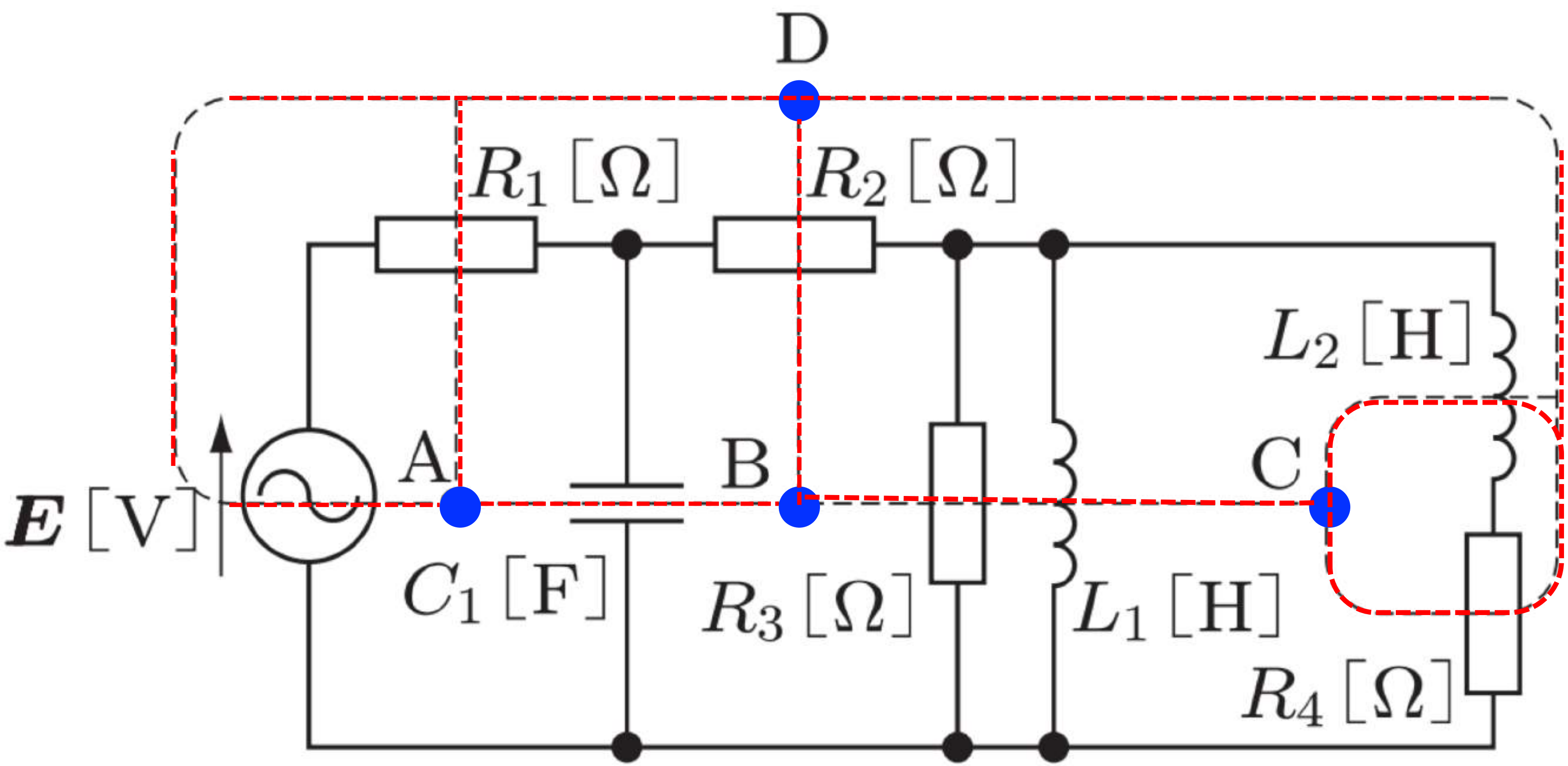




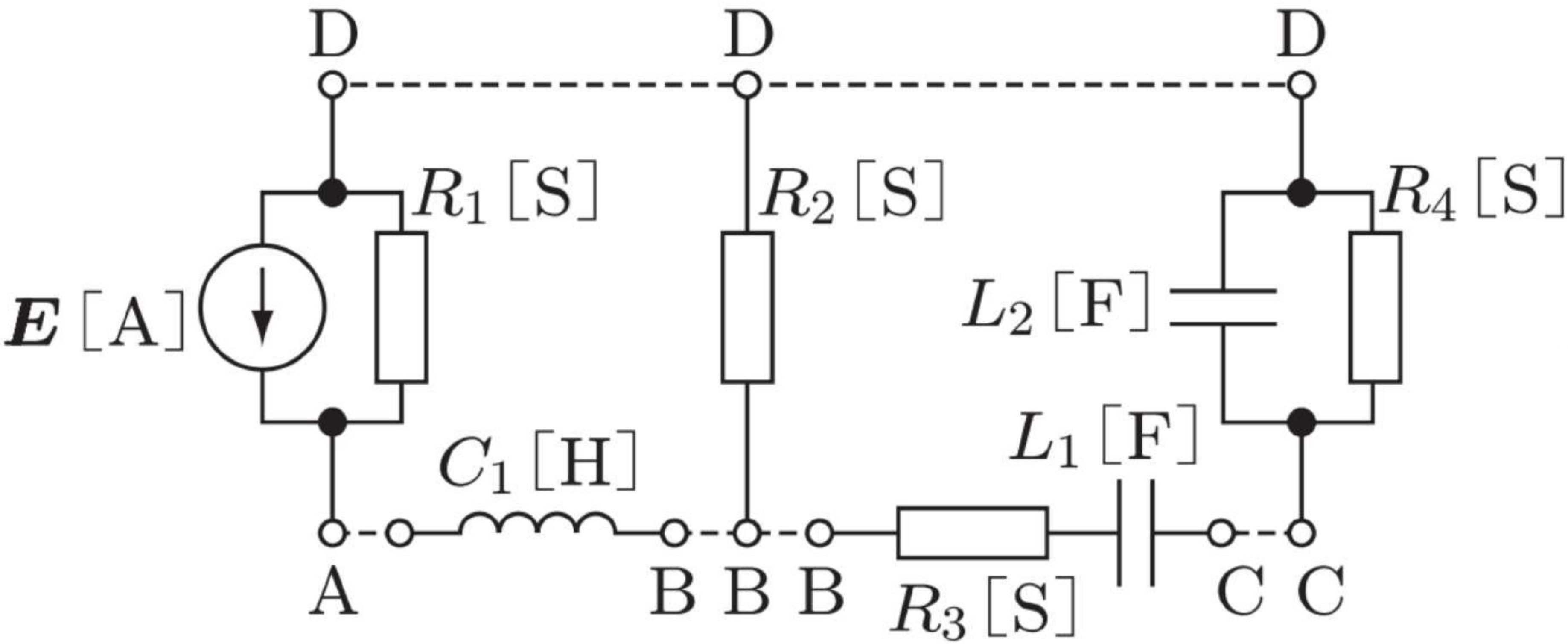
双対回路の作り方：練習



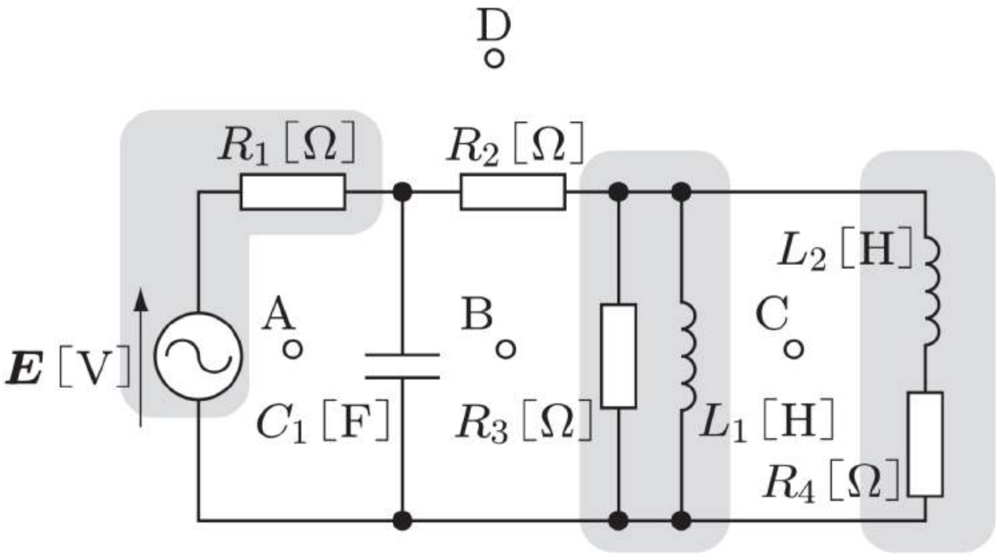
双対回路の作り方：練習



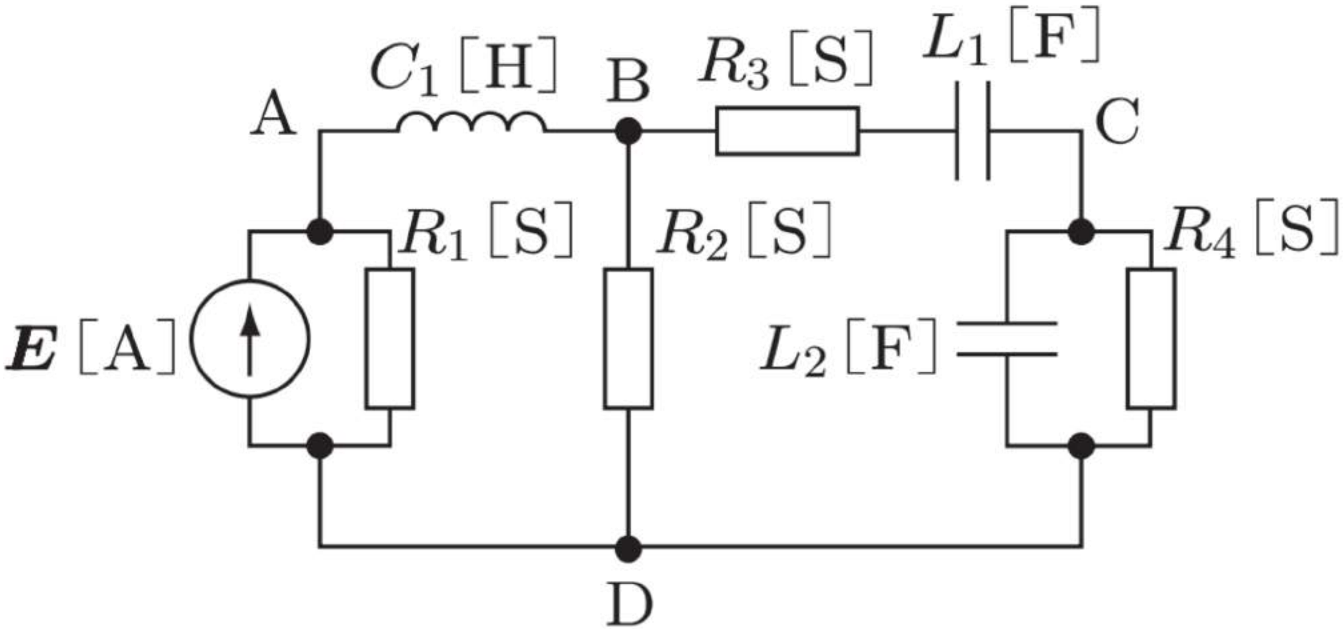
双対回路の作り方：練習



単位は変えるが、素子の数値自体はかえない。

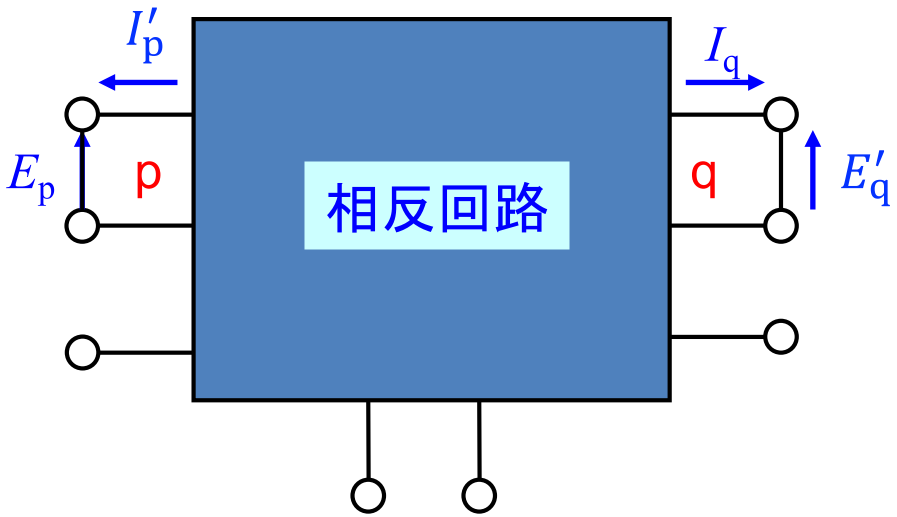

D
R_1 [Ω]
R_2 [Ω]
L_2 [H]
A
B
C
$\boldsymbol{E}$ [V]
C_1 [F]
R_3 [Ω]
L_1 [H]
R_4 [Ω]

原回路

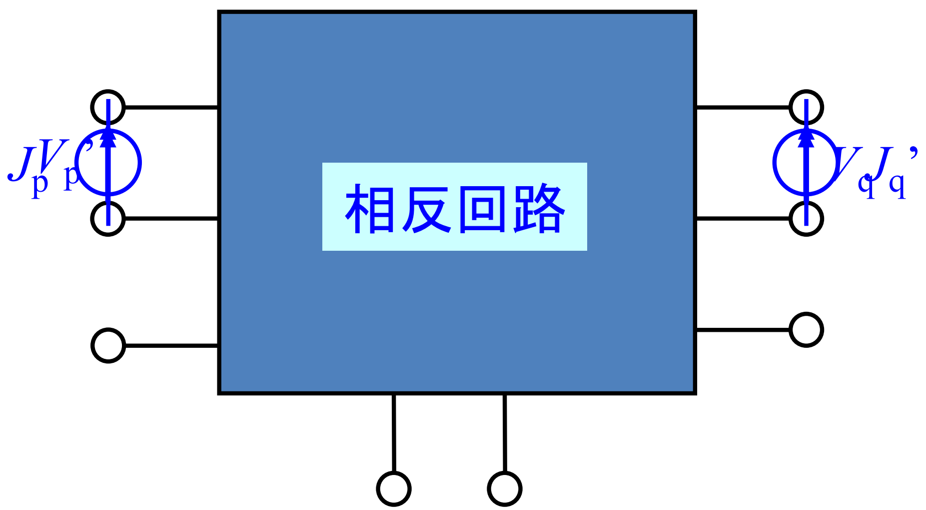

C_1 [H]
B
R_3 [S]
L_1 [F]
A
C
R_1 [S]
R_2 [S]
R_4 [S]
$\boldsymbol{E}$ [A]
L_2 [F]
D

双対回路

相反定理

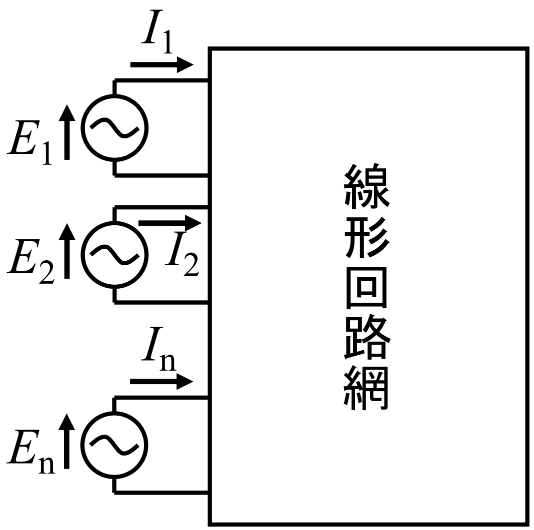


$E_p I'_p = E'_q I_q$ の関係が成り立つ時



$J_p V'_q = J'_q V_q$ の関係が成り立つ時

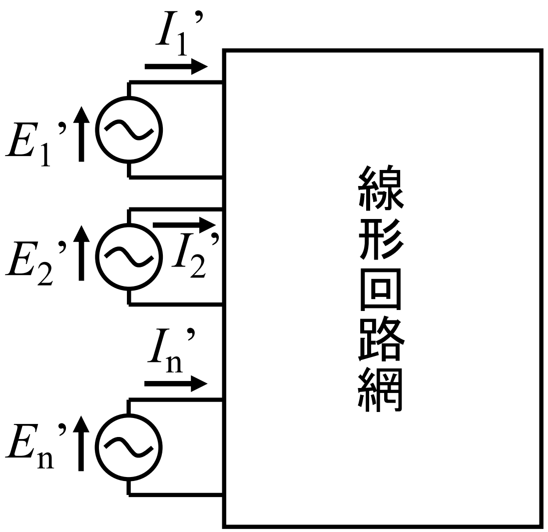
相反定理の証明



線形回路網において、各閉路に電圧源$E_1, E_2, \cdot\cdot, E_n$があるとき、各閉路の電流を$I_1, I_2, \cdot\cdot, I_n$とすると、

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \qquad \cdots (1)$$

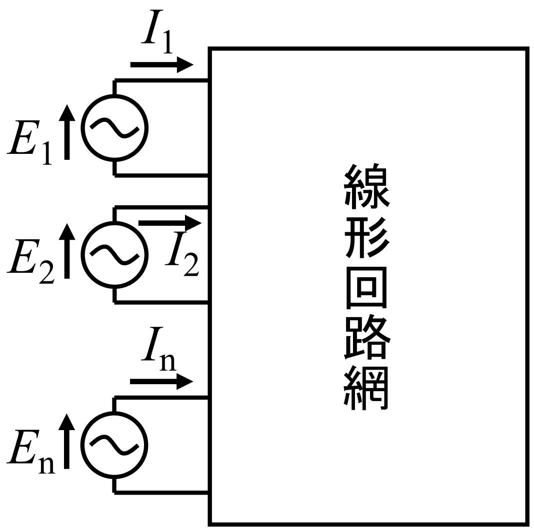
回路が線形ならば、Z行列は電流値に依らず普遍。
また、回路網が相反回路なら、$Z_{jk} = Z_{kj}$ が成り立つ。つまり、Z行列は対称行列となる。



また、各閉路に電圧源$E_1', E_2', \cdot\cdot, E_n'$があるとき、各閉路の電流を$I_1', I_2', \cdot\cdot, I_n'$とすると、

$$\begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ \vdots \\ E_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ \vdots \\ I_n' \end{bmatrix} \qquad \cdots (2)$$

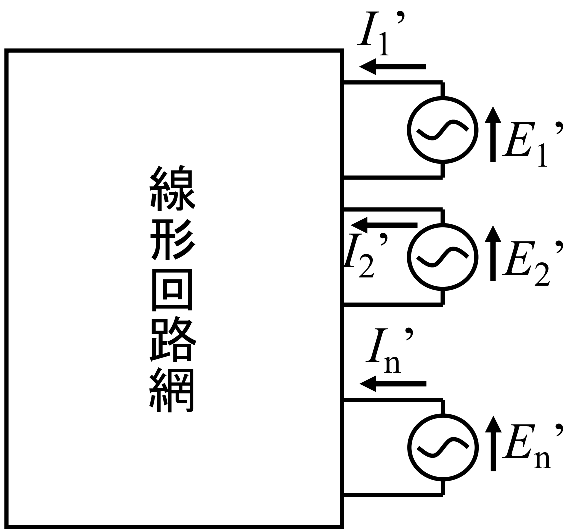
相反定理の証明



線形回路網において、各閉路に電圧源$E_1, E_2, \cdot\cdot, E_n$があるとき、各閉路の電流を$I_1, I_2, \cdot\cdot, I_n$とすると、

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad \cdots (1)$$

回路が線形ならば、Z行列は電流値に依らず普遍。
また、回路網が相反回路なら、$Z_{jk} = Z_{kj}$ が成り立つ。つまり、Z行列は対称行列となる。



また、各閉路に電圧源$E_1', E_2', \cdot\cdot, E_n'$があるとき、各閉路の電流を$I_1', I_2', \cdot\cdot, I_n'$とすると、

$$\begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ \vdots \\ E_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ \vdots \\ I_n' \end{bmatrix} \quad \cdots (2)$$

相反定理の証明

(1)式から、転置行列の公式および Z 行列が対称行列であることを用いて、

$$
{}^t\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} {}^t\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix}
$$

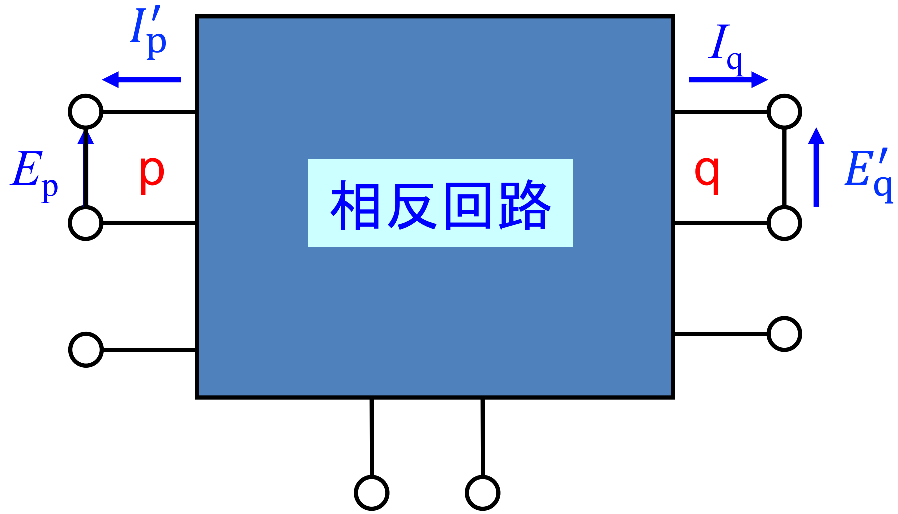
上式の両辺に対して右から $\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ \vdots \\ I_n' \end{bmatrix}$ を作用させると、

$$
{}^t\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ \vdots \\ I_n' \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ \vdots \\ I_n' \end{bmatrix}
$$

相反定理の証明

(2)式の関係より、

$$
{}^{t}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ \vdots \\ I_n' \end{bmatrix} = {}^{t}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ \vdots \\ E_n' \end{bmatrix}
$$



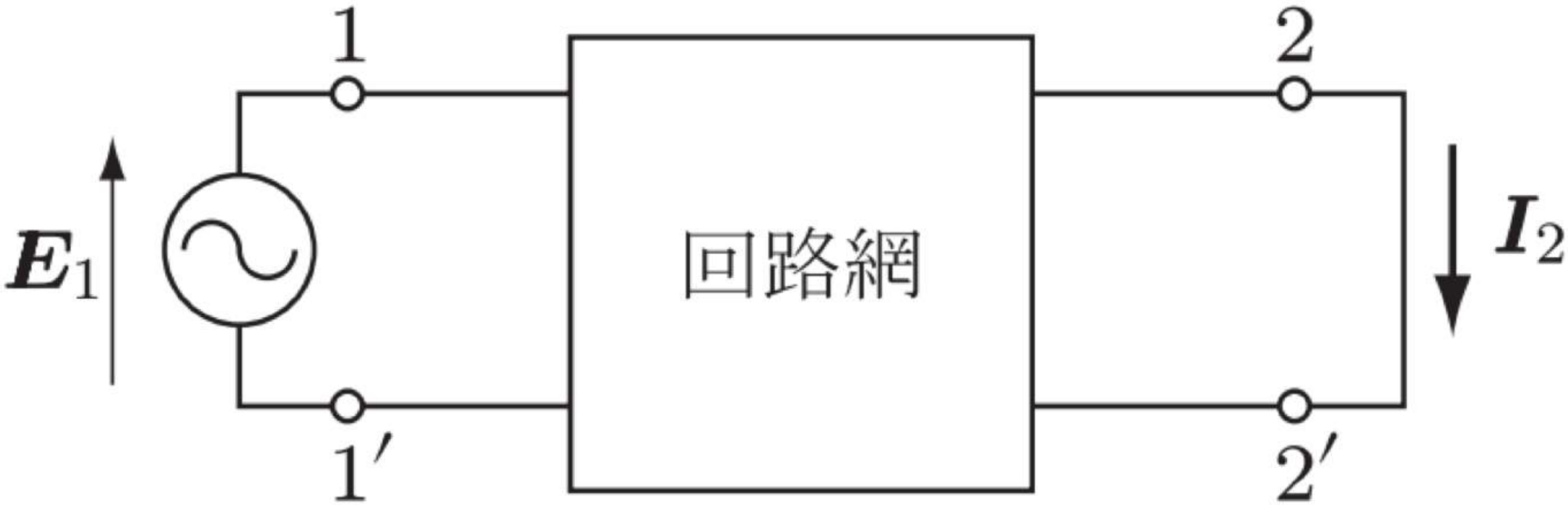
つまり、

$$
\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ \vdots \\ I_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & \cdots & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ \vdots \\ E_n' \end{bmatrix}
$$

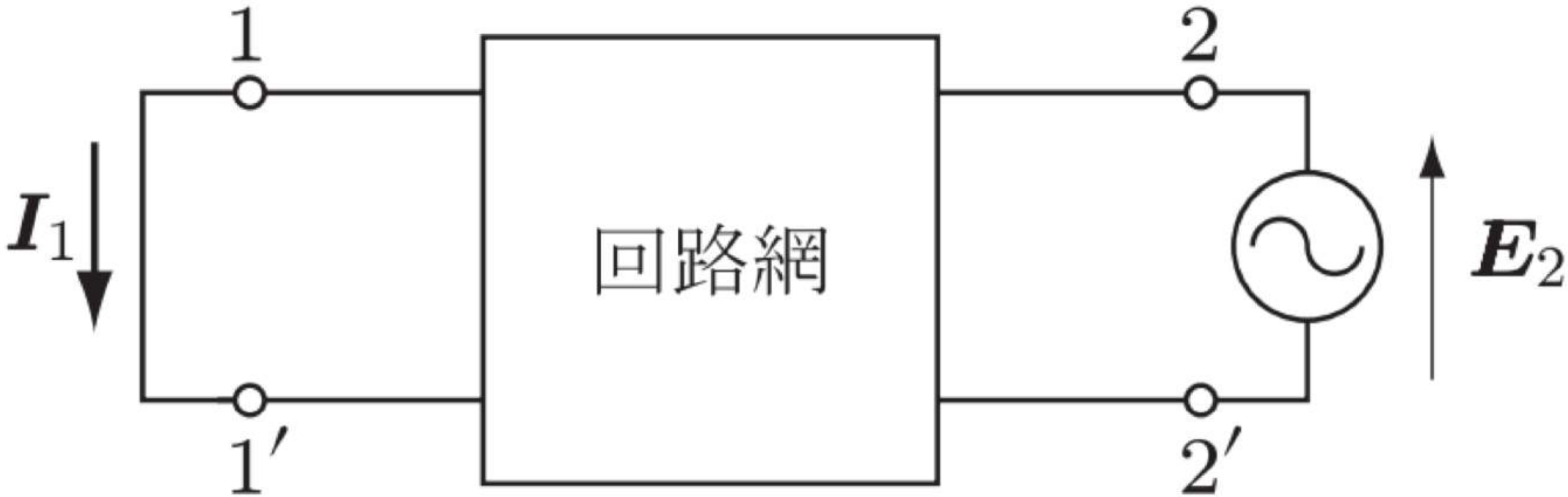
従って、 $E_1 I_1' + E_2 I_2' + \cdots + E_n I_n' = E_1' I_1 + E_2' I_2 + \cdots + E_n' I_n$

$$
E_\mathrm{p} I_\mathrm{p}' = E_\mathrm{q}' I_\mathrm{q}
$$

相反定理の応用

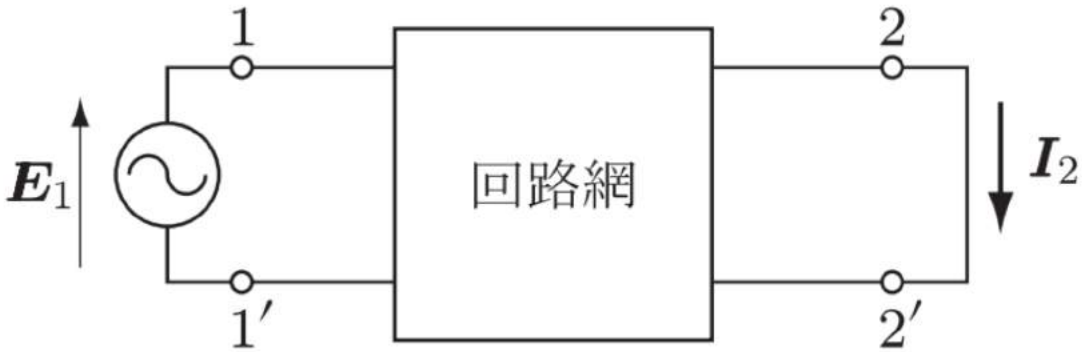


$$\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{Y}_{21}\boldsymbol{E}_1$$

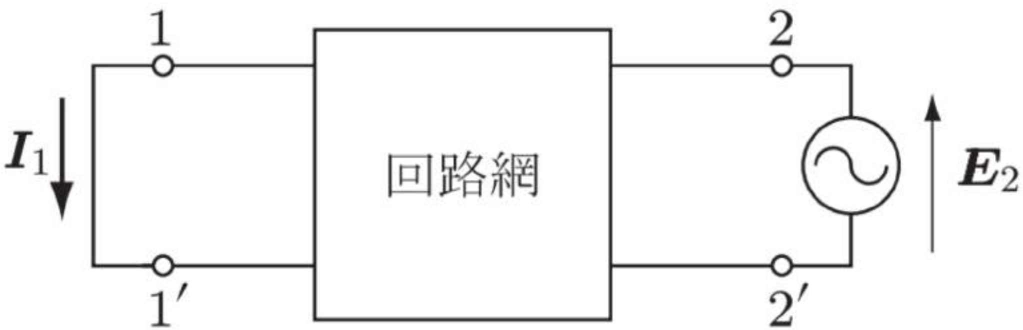


$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{Y}_{12}\boldsymbol{E}_2$$

$$\frac{\boldsymbol{E}_1}{\boldsymbol{I}_2} = \frac{\boldsymbol{E}_2}{\boldsymbol{I}_1}$$



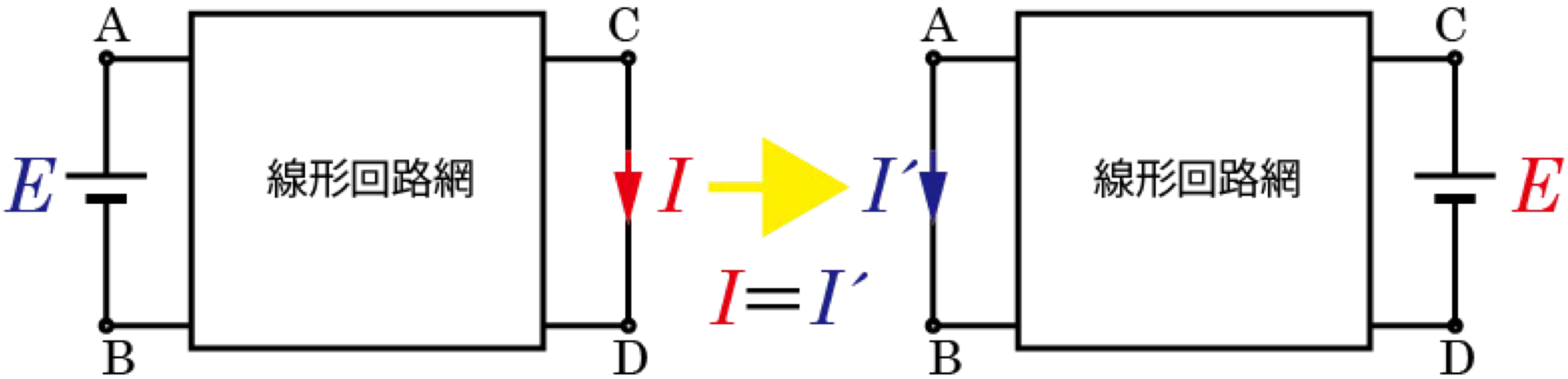
$$\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{I}_2$$



$$\boldsymbol{Y}_{12} = \boldsymbol{Y}_{21}$$

相反の定理

線形回路の枝路ABの起電力Eによって枝路CDに電流Iが流れるとき、逆に枝路CDに起電力Eを挿入すれば、枝路ABに同じ電流Iが流れる。

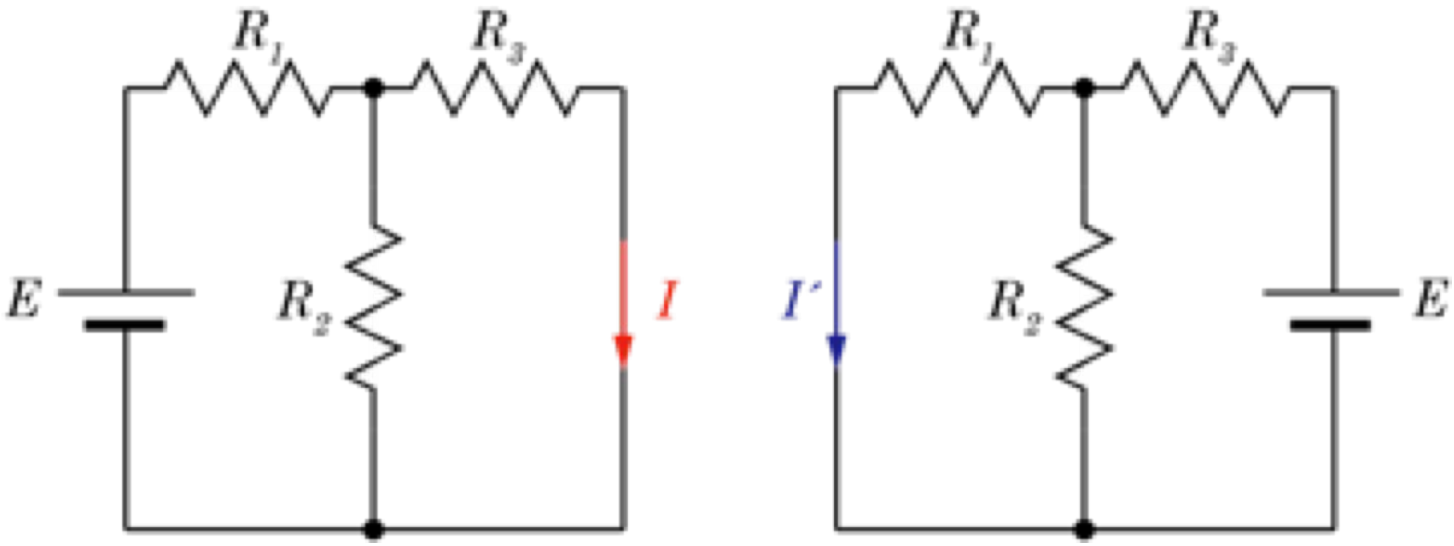


$$\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{I}_2$$

$$E_1 = E_2$$

$$I_1 = I_2$$

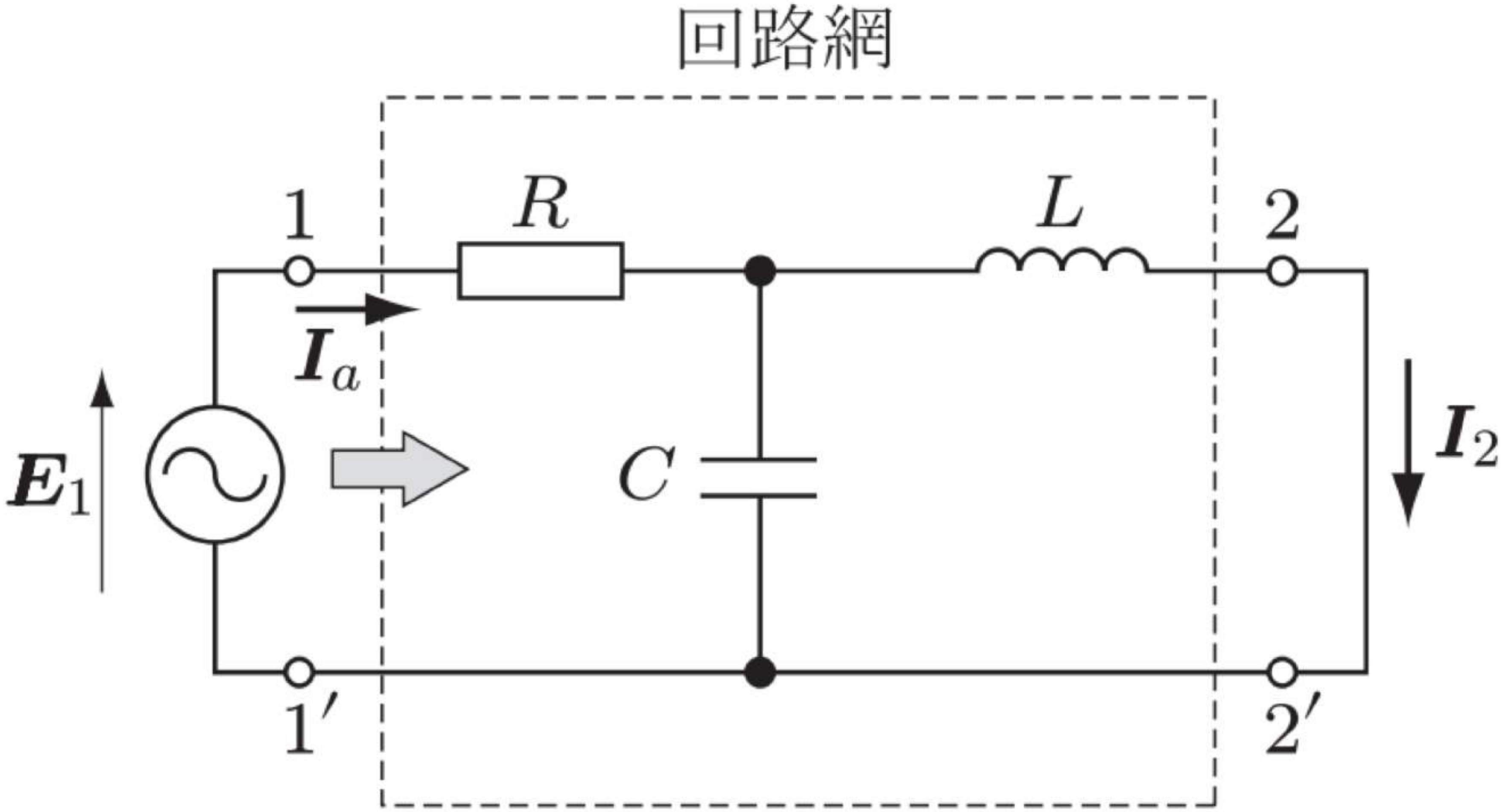
相反定理の検証



$$I = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_1 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \frac{E}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{R_2 E}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$$

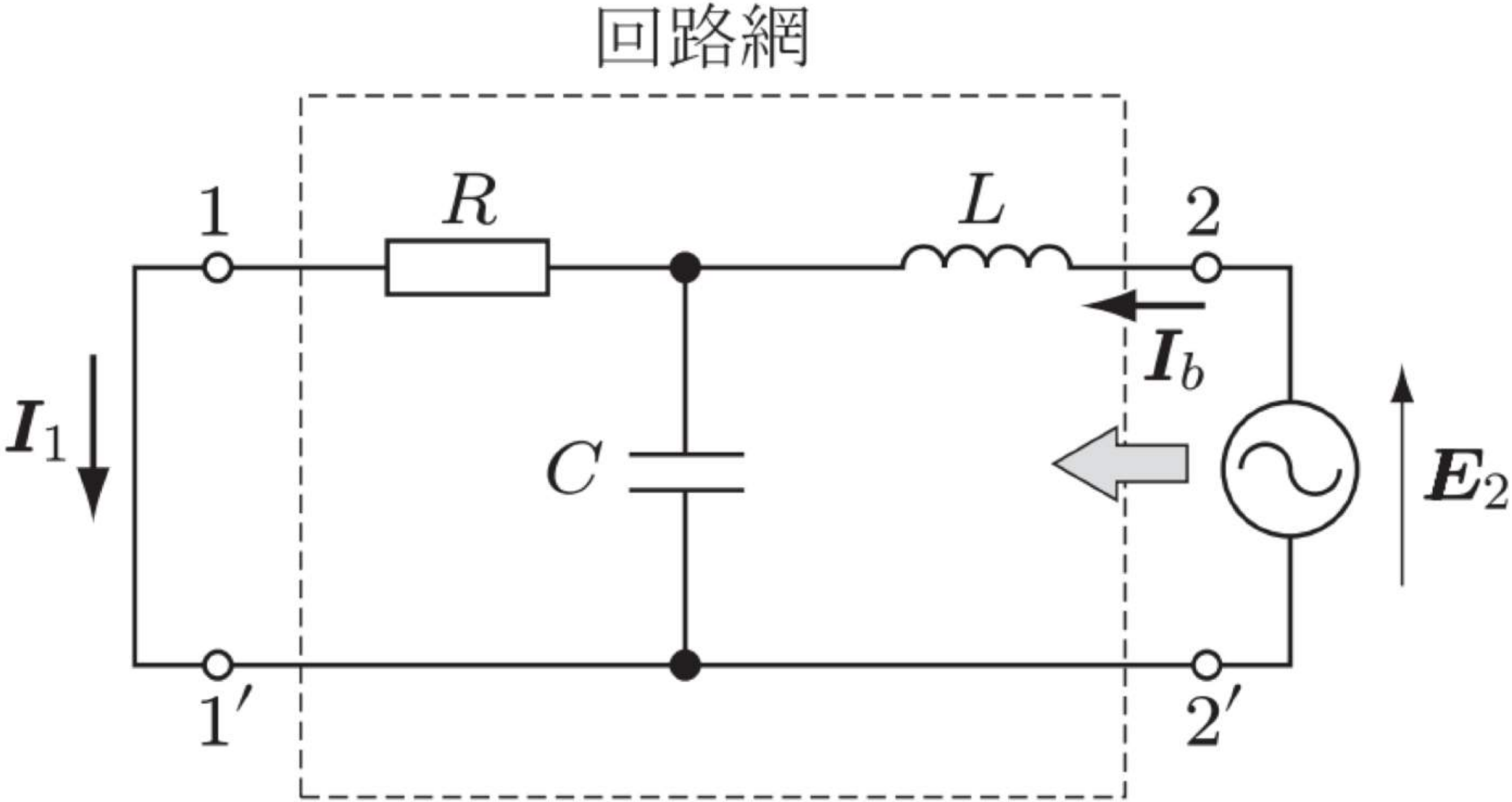
$$I' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_3 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{E}{R_3 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{R_2 E}{R_3(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

相反定理の検証



(a)

相反定理の検証

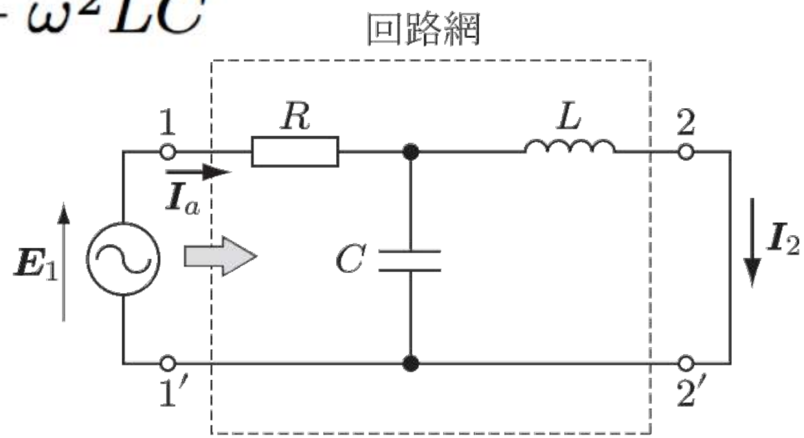


（b）

相反定理の検証

$$Z_{21} = R + \frac{j\omega L \cdot 1/(j\omega C)}{j\omega L + 1/j\omega C} = R + \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

$$= \frac{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$



（a）

$$\boldsymbol{I}_a = \frac{\boldsymbol{E}_1}{\boldsymbol{Z}_{21}} = \frac{1-\omega^2 LC}{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L}\boldsymbol{E}_1$$

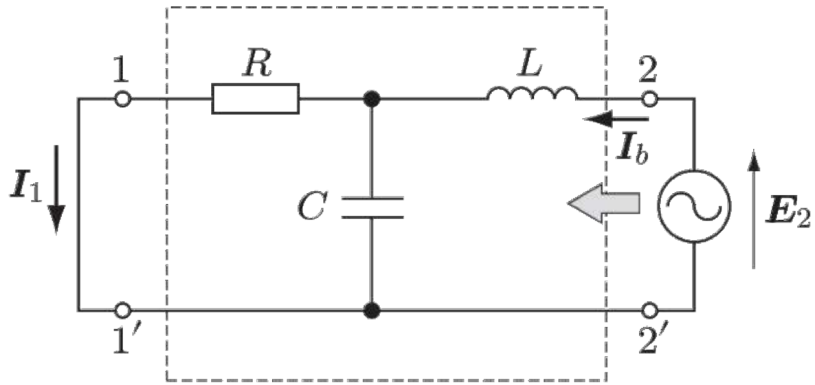
分流の法則を用いて，L を流れる電流 $\boldsymbol{I}_2$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{1/(j\omega C)}{j\omega L + 1/(j\omega C)}\boldsymbol{I}_a = \frac{1}{1-\omega^2 LC}\boldsymbol{I}_a = \frac{1}{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L}\boldsymbol{E}_1$$

相反定理の検証

$$\boldsymbol{Z}_{12} = j\omega L + \frac{R \cdot 1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR}$$

$$= \frac{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}{1 + j\omega CR}$$



（b）

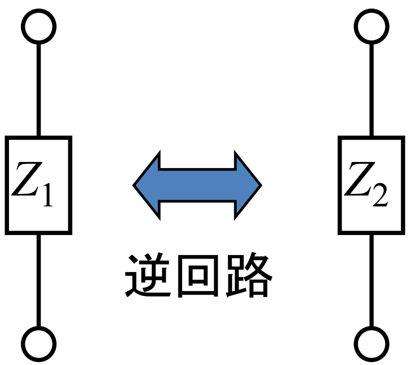
$$\boldsymbol{I}_b = \frac{\boldsymbol{E}_2}{\boldsymbol{Z}_{12}} = \frac{1 + j\omega CR}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}\boldsymbol{E}_2$$

分流の法則を用いて，R を流れる電流 $\boldsymbol{I}_1$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)}\boldsymbol{I}_b = \frac{1}{1 + j\omega CR}\boldsymbol{I}_b = \frac{1}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}\boldsymbol{E}_2$$

逆回路

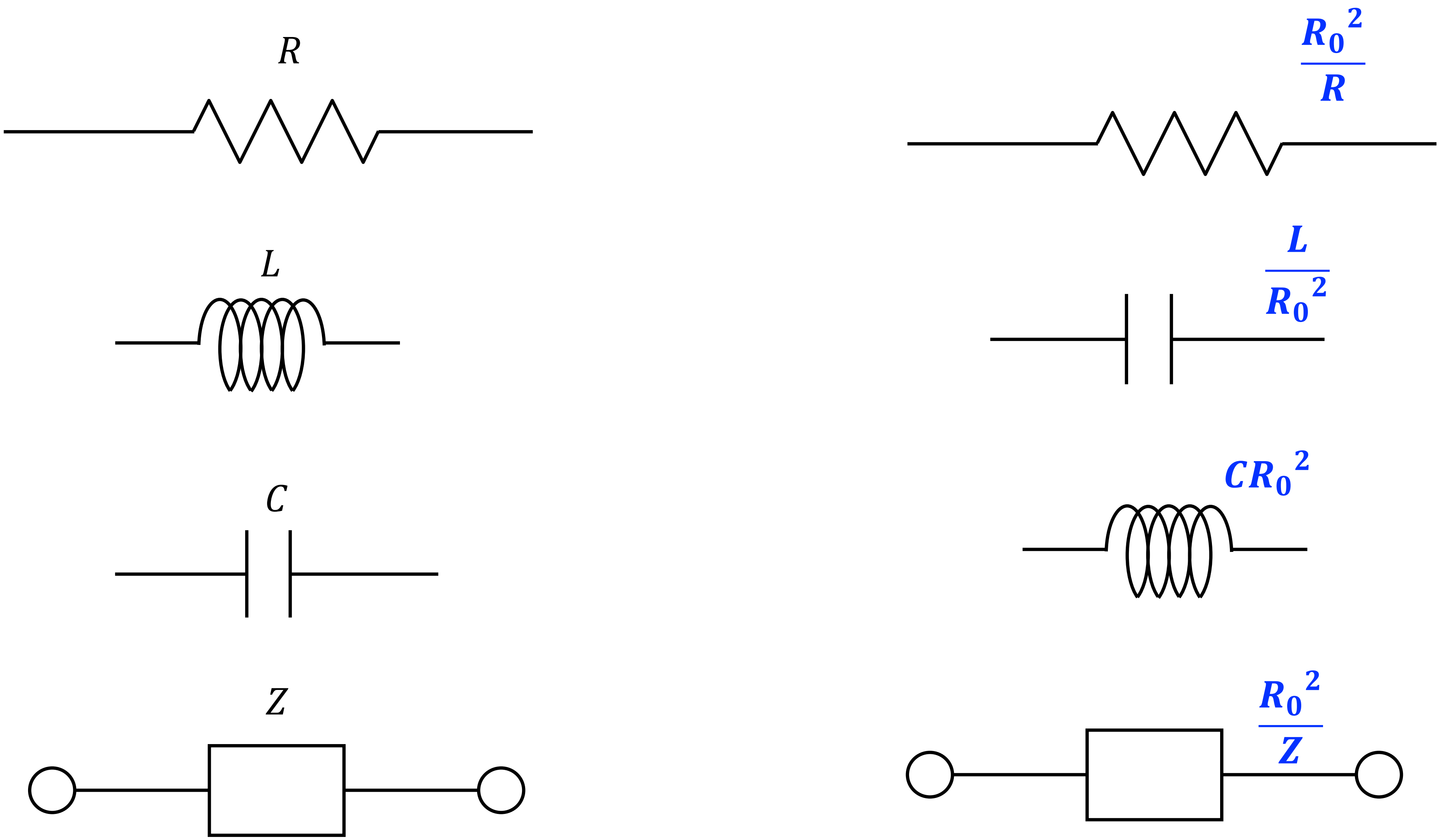
逆回路とは
2つの二端子回路があり、そのインピーダンスを Z_1, Z_2 とするとき、その積が周波数 w に関係なく $Z_1 Z_2 = R_0{}^2$ となるならば、二つの回路は R_0 に関して互いに逆回路であるという。



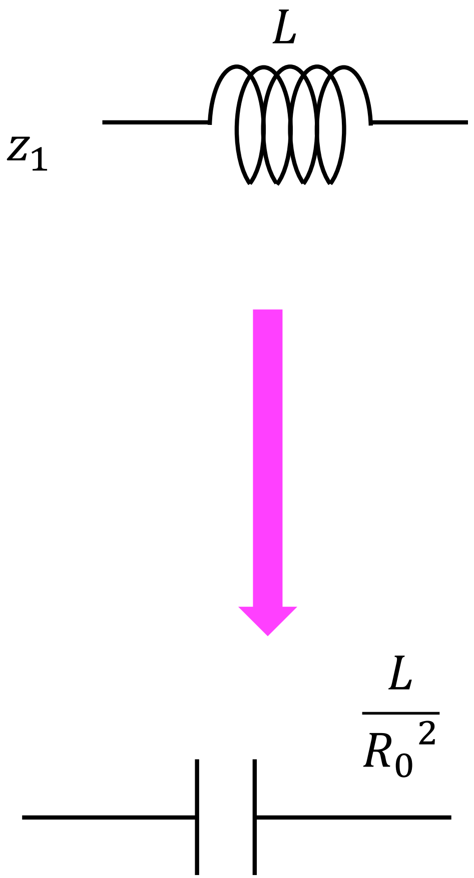
$$z_2 = \frac{R_0{}^2}{z_1} \qquad z_2 z_1 = R_0{}^2$$

逆回路

代表的2端子回路の逆回路



逆回路



インダクタンスLの逆回路:

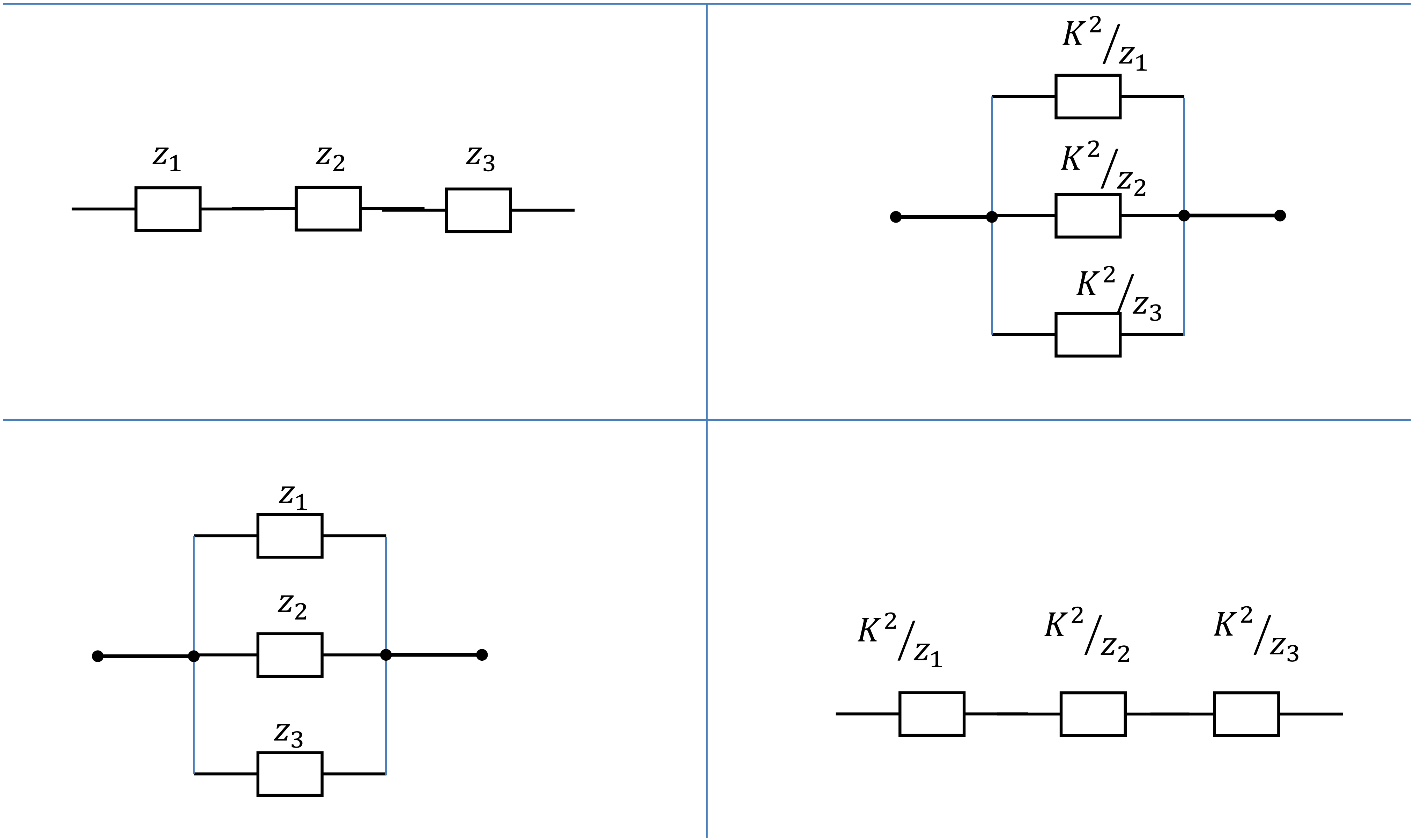
インダクタンスLに対するインピーダンスは jw$L$である。

$$z_1 = \mathrm{jw}L \qquad z_2 = \frac{{R_0}^2}{z_1}$$

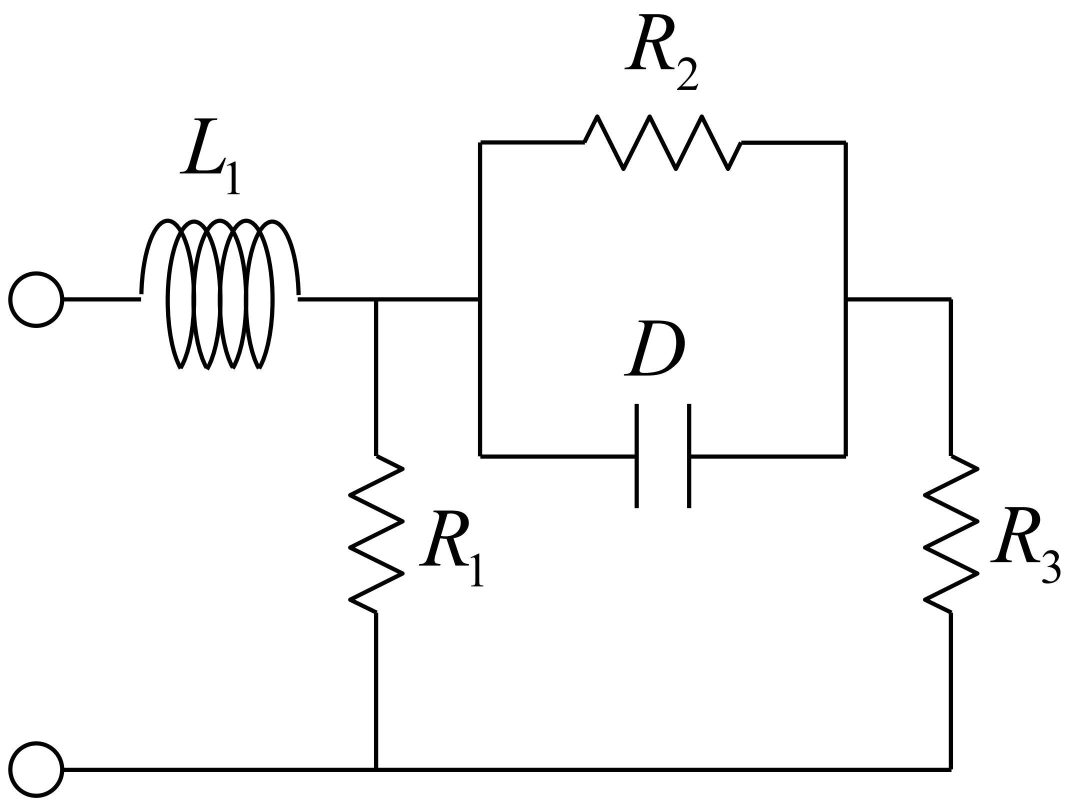
$$z_2 = \frac{{R_0}^2}{\mathrm{jw}L} = \frac{1}{\mathrm{jw}\left(\frac{L}{{R_0}^2}\right)} = \frac{1}{jwC}$$

$$\boxed{C = \frac{L}{{R_0}^2}}$$

直列接続と並列接続の逆回路



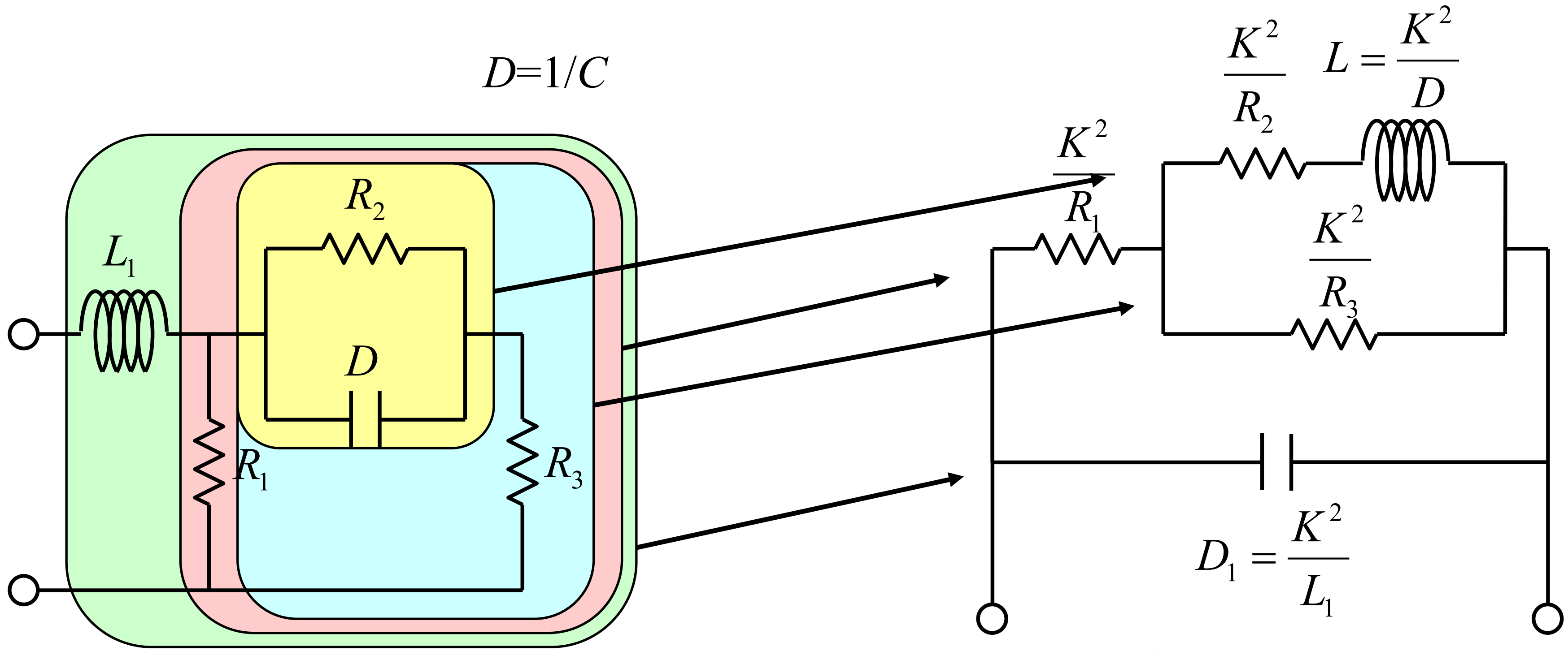
逆回路の作成方法



逆回路の作成方法

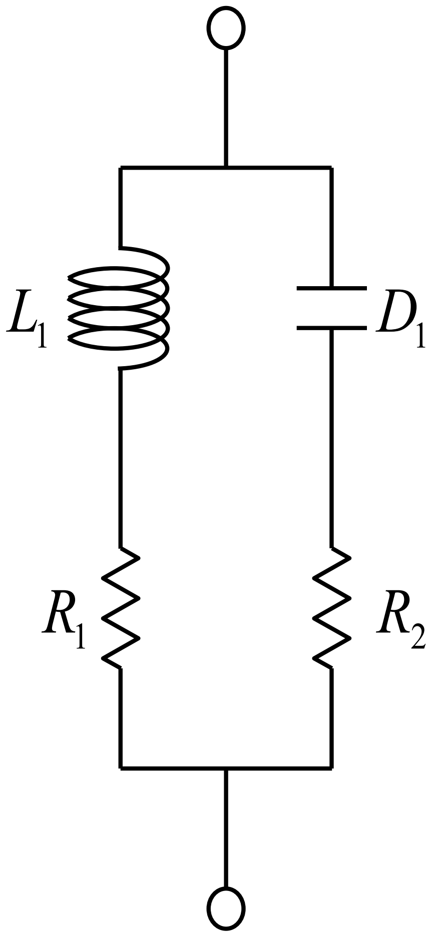
$$K = R_0{}^2$$

逆回路の作り方

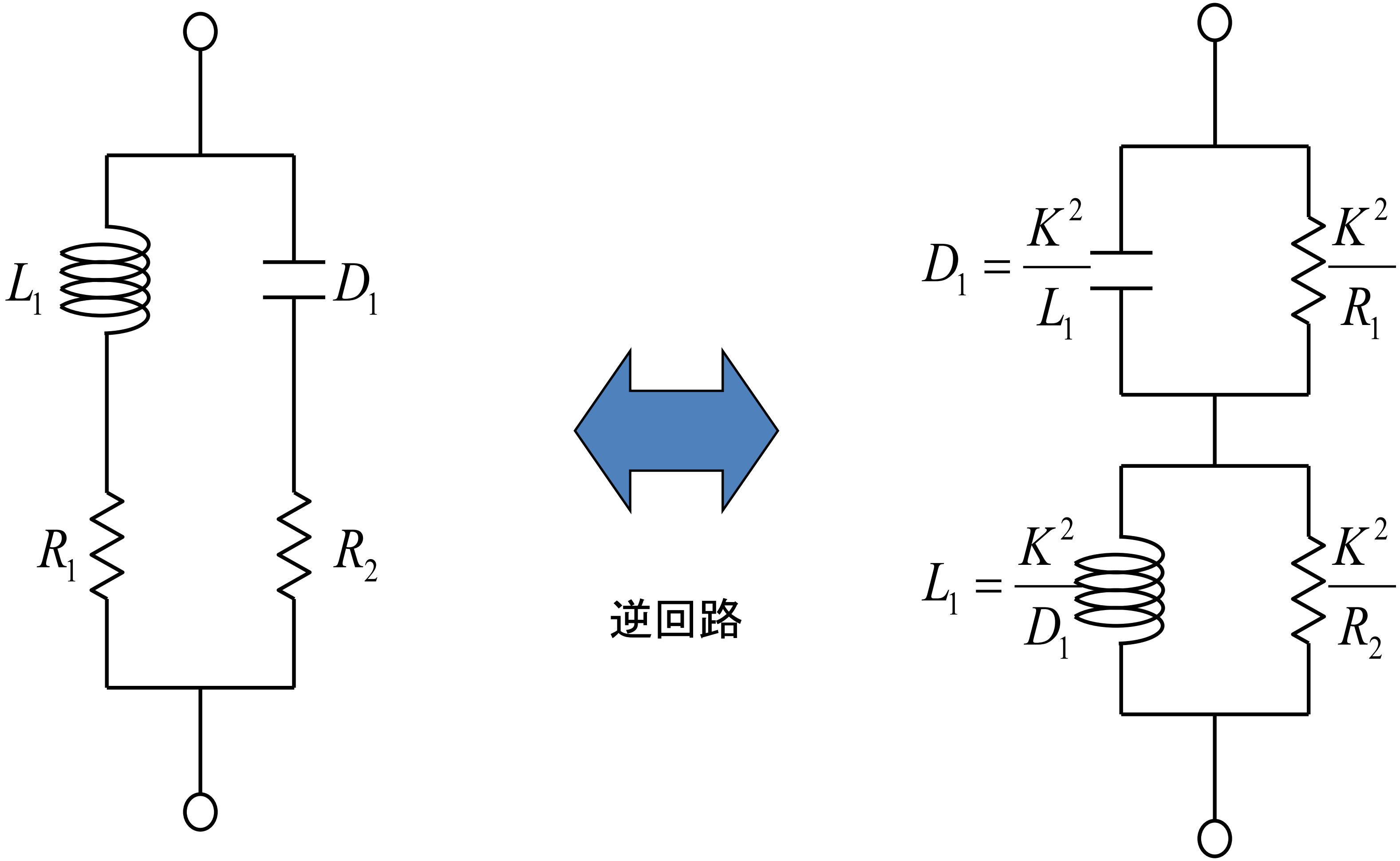


ただし、$D_1=1/C_1$

逆回路の作成練習



逆回路


L_1
D_1
R_1
R_2
逆回路
$D_1 = \frac{K^2}{L_1}$
$\frac{K^2}{R_1}$
$L_1 = \frac{K^2}{D_1}$
$\frac{K^2}{R_2}$

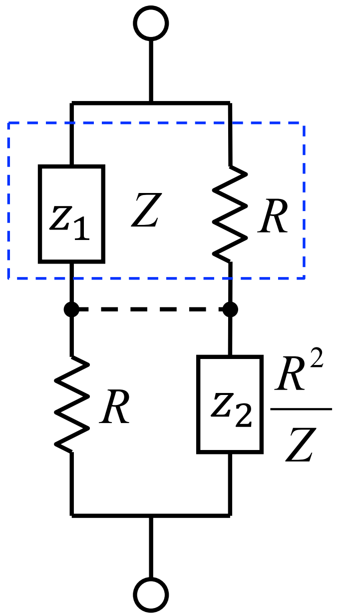
定抵抗回路

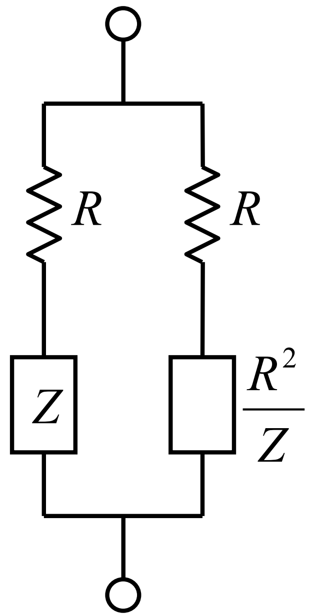
インピーダンスが ω に依存しない二端子回路

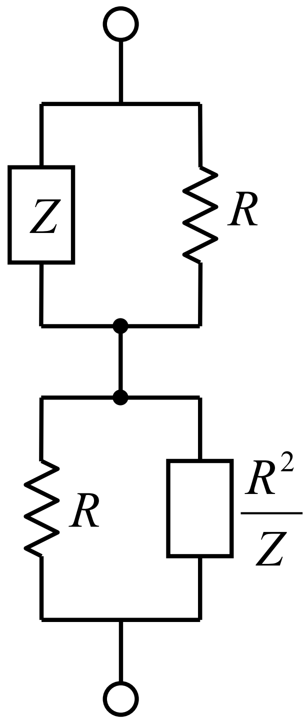
下の回路のインピーダンスはいずれも R となり、ω にには依存しない定抵抗回路

$$z_2 z_1 = {R_0}^2$$

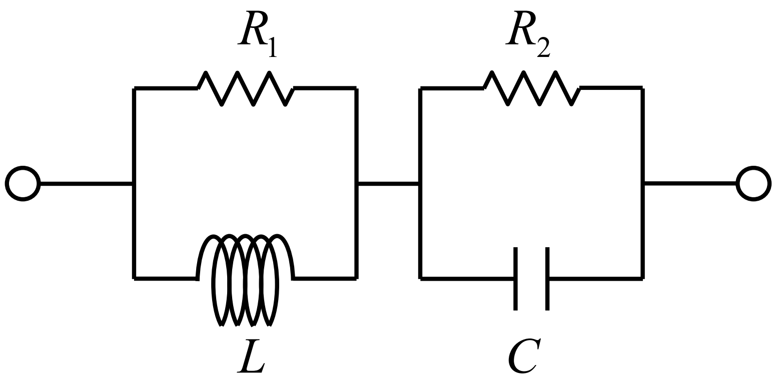
逆回路







定抵抗回路



$$Z(\omega) = \frac{-\omega^2 LCR_1R_2 + j\omega(LR_1 + LR_2) + R_1R_2}{-\omega^2 LCR_2 + j\omega(L + CR_1R_2) + R_1} = R_0$$

この式が、周波数 ω の値に関係なく成立するためには、分母と分子の各項の係数の比が R_0 に等しくなければならない

つまり、 $$\frac{LCR_1R_2}{LCR_2} = \frac{L(R_1 + R_2)}{L + CR_1R_2} = \frac{R_1R_2}{R_1} = R_0$$

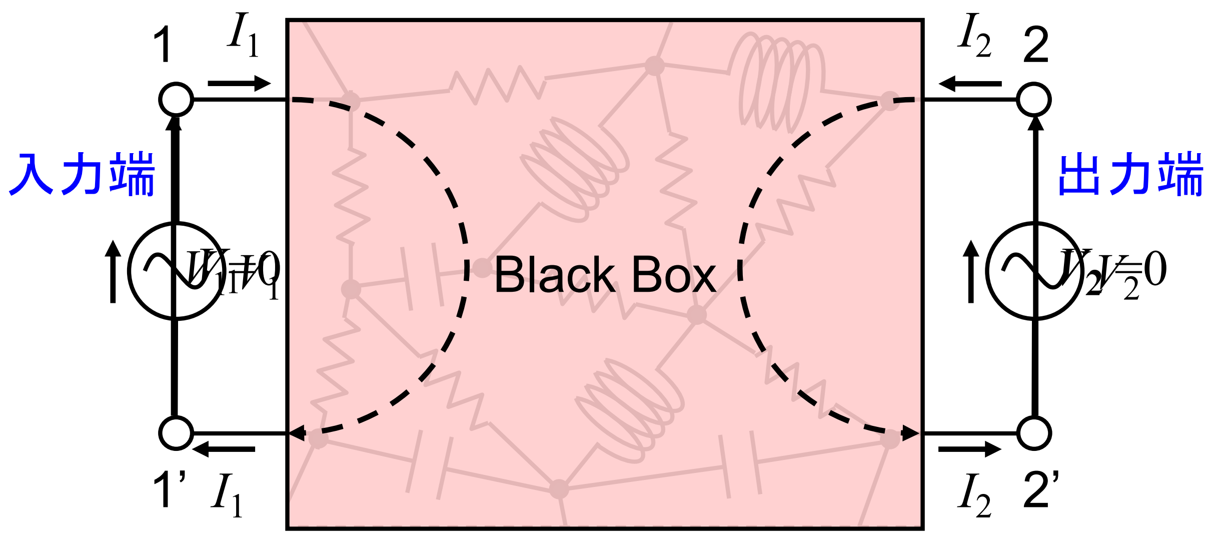
従って、 $R_1 = R_2 = R_0$ $\quad \dfrac{L}{C} = R_0^2$

システムの表現

原因

結果

二端子対回路



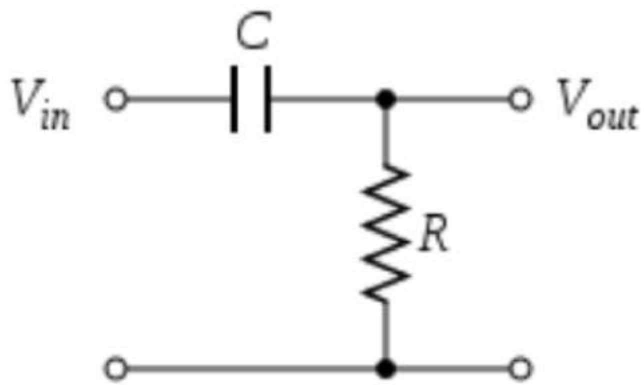
内部には電源を含まないものとする

2端子対回路とは

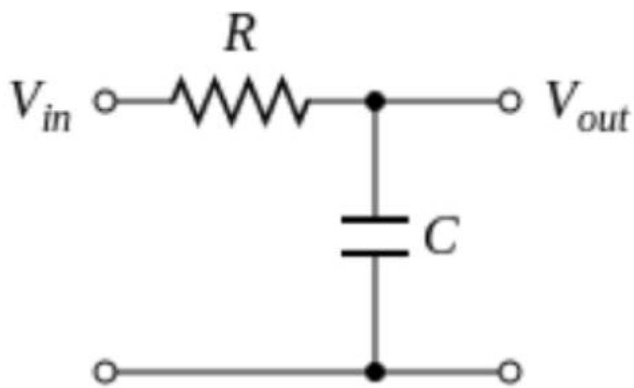
図のように、回路から2組の端子対を引き出 して、そのうち1組を入力側、他の1組を出力 側として使う場合、この回路を2端子対回路と 呼ぶ。

２端子対回路の例： フィルタ回路

- フィルタ回路とは、入力された電気信号に帯域制限をかけたり、特定の周波数成分を取り出すための電気回路（または電子回路）、つまりフィルタの役割をする電気回路のことを言う。 濾波器（ろはき）ともいう。

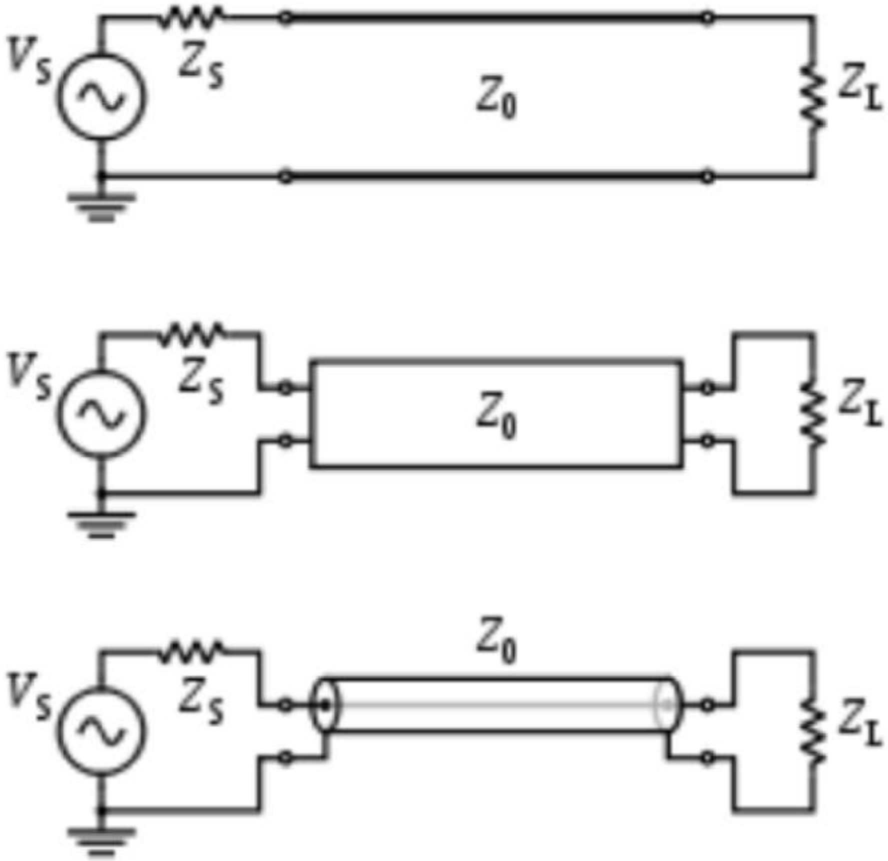


ハイパス（高域通過）フィルタの例

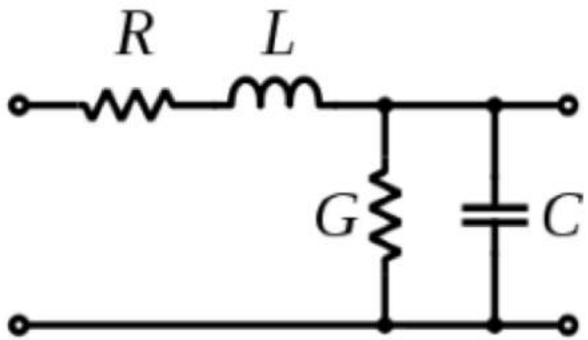


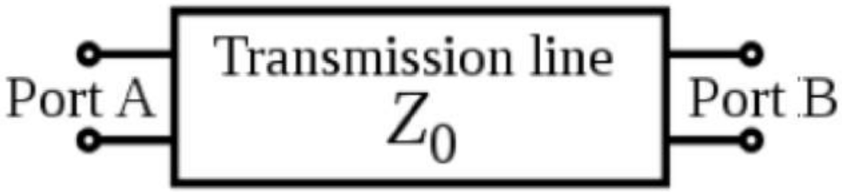
ローパス（低域通過）フィルタの例

2端子対回路の例：転送線路「重要」



電力信号をある地点から別の地点へ送信するための配線。





伝送線路は短い区間を表す2端子対の素子を無限に直列に接続した分布定数回路で表される。

2端子対回路の変数

- 通常、2端子対回路に次の制限条件を設ける。

1. 回路は線形で、重ね合わせの理が成り立つ。
2. $i_1 = i'_1, \; i_2 = i'_2$ が成り立つ。
3. 内部に発振回路持たない。

2端子対回路の解析手法:

- 以上の条件で、2端子対回路の変数は i_1, v_1, i_2, v_2 の4つとなる。
- そのうち2つを独立変数 x_1, x_2 として選んで、残りの2つを従属変数 y_1, y_2 とすれば、回路の特性が次のように表される。

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

- よって、2端子対回路は4つのパラメータ $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ で特徴付けられる。

2端子対回路の解析手法:

- 2端子対回路の4つの変数 i_1, v_1, i_2, v_2 を x_1, x_2 への割り当て方は6通りあるので、2端子対回路のパラメータも6種類がある。ここでは、よく使われる3種類を勉強する。

- また、以下で入力電圧・電流を正弦波交流に限定するので、i_1, v_1, i_2, v_2 はそれぞれ $\dot{I}_1, \dot{V}_1, \dot{I}_2, \dot{V}_2$ で表す。

代表的な２端子対パラメータ

1. Zパラメータ（Z行列、インピーダンス行列）

$\dot{I}_1, \dot{I}_2$ を x_1, x_2 に、$\dot{V}_1, \dot{V}_2$ を y_1, y_2 に割り当てると、回路の特性は次式で表される。

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \dot{Z}_{11}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \dot{Z}_{21}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$a_{ij} \Rightarrow \dot{Z}_{ij}, \ \ i, j = 1, 2$$

インピーダンス行列：Z行列

- 上式は次の行列表示の形で表せる。

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

Z行列

- その係数行列をZ行列という。
Z行列の要素はZパラメータという。

Zパラメータはいかに求めるか？

Zパラメータは次のように求められる。

$$\dot{Z}_{11} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} =$$ 出力端開放 駆動点インピーダンス

$$\dot{Z}_{12} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} =$$ 入力端開放 伝達インピーダンス

$$\dot{Z}_{21} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} =$$ 出力端開放 伝達インピーダンス

$$\dot{Z}_{22} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} =$$ 入力端開放 駆動点インピーダンス

駆動点側:同じ端子側の関係を表す場合;

伝達:入力側と出力側の関係を表す場合;

Zパラメータのインデックスの意味

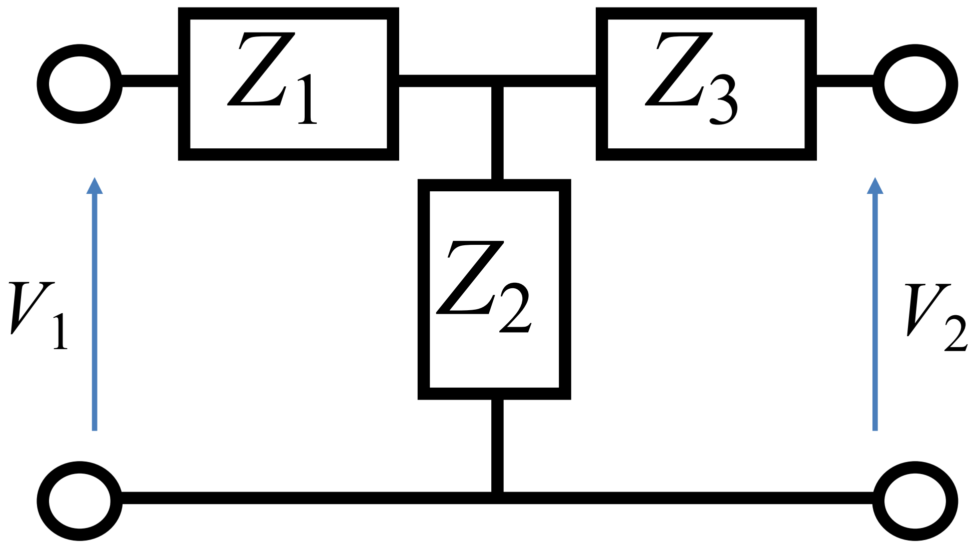
$$Z_{ij}$$

$$\downarrow$$

$$Z_{ij} = \frac{V_i}{I_j}$$

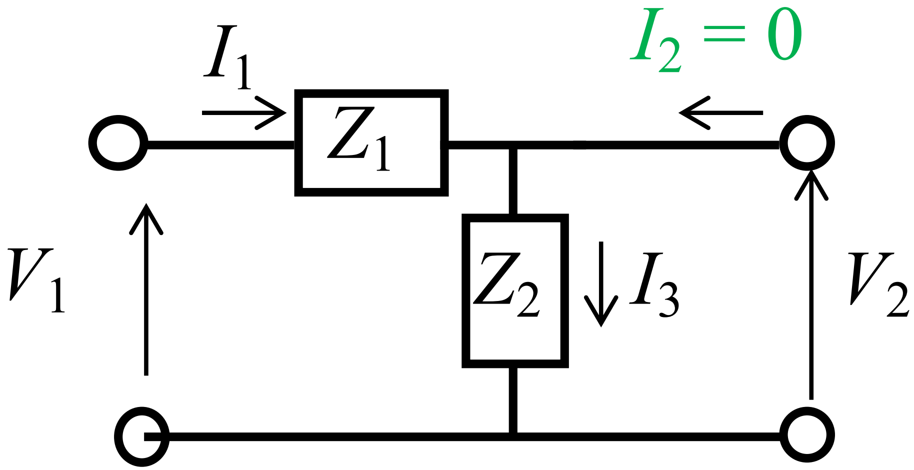
Z行列の導出

次のT型回路のZパラメータを求めよ。



Z行列の導出

まず、出力端開放($I_2=0$)で、電流 I_1 を流した場合、

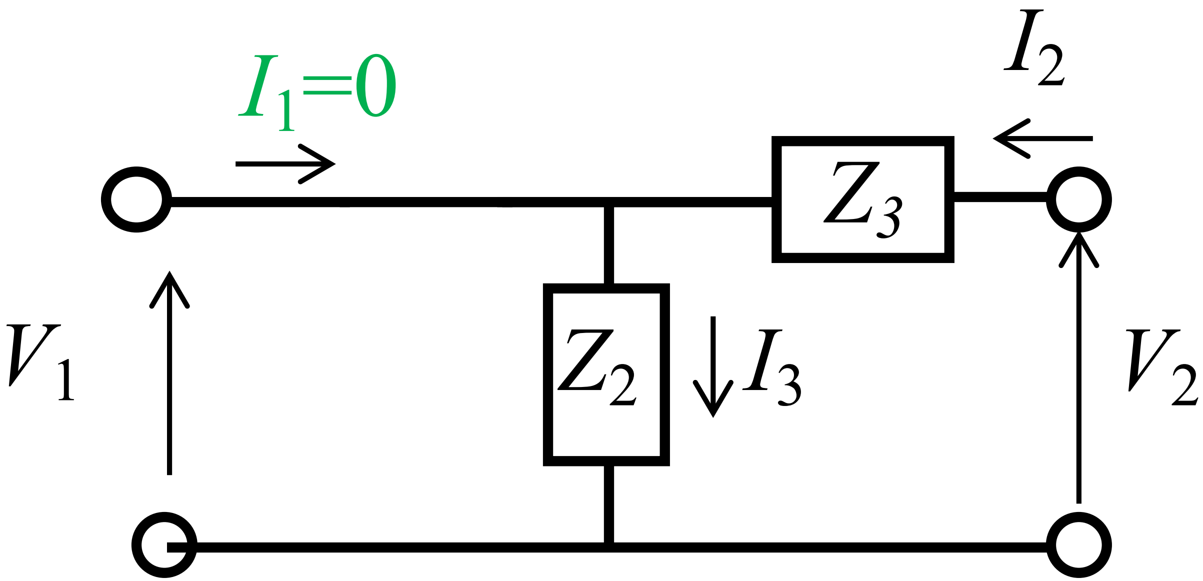


$$V_1=(Z_1+Z_2)I_1 \qquad \therefore \quad z_{11}=\frac{V_1}{I_1}=Z_1+Z_2$$

$$V_2=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}V_1=Z_2I_1 \qquad \therefore \quad z_{21}=\frac{V_2}{I_1}=Z_2$$

Z行列の導出

次に、入力端開放($I_1=0$)で、電流 I_2 を流した場合、



$$V_1=\frac{Z_2}{Z_2+Z_3}V_2=Z_2I_2 \qquad \therefore \quad z_{12}=\frac{V_1}{I_2}=Z_2$$

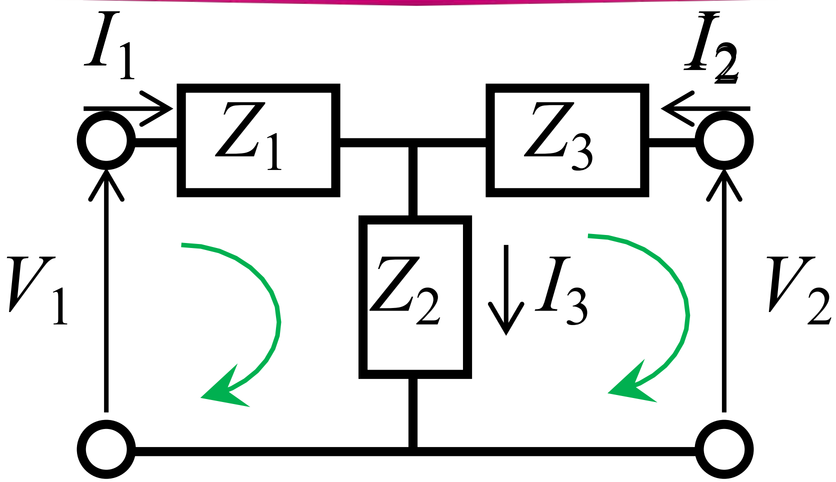
$$V_2=\left(Z_2+Z_3\right)I_2 \qquad \therefore \quad z_{22}=\frac{V_2}{I_2}=Z_2+Z_3$$

Z行列の導出

従って、Z行列は、

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

Z行列の導出



別の求め方として、Z_2 に流れる電流を図のようにI_3 と置くと、

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad \cdots(1)$$

$$V_1 = Z_1 I_1 + Z_2 I_3 \quad \cdots(2)$$

$$V_2 = Z_3 I_2 + Z_2 I_3 \quad \cdots(3)$$

Z行列の導出

式(1)を式(2), (3)に代入して整理すると、

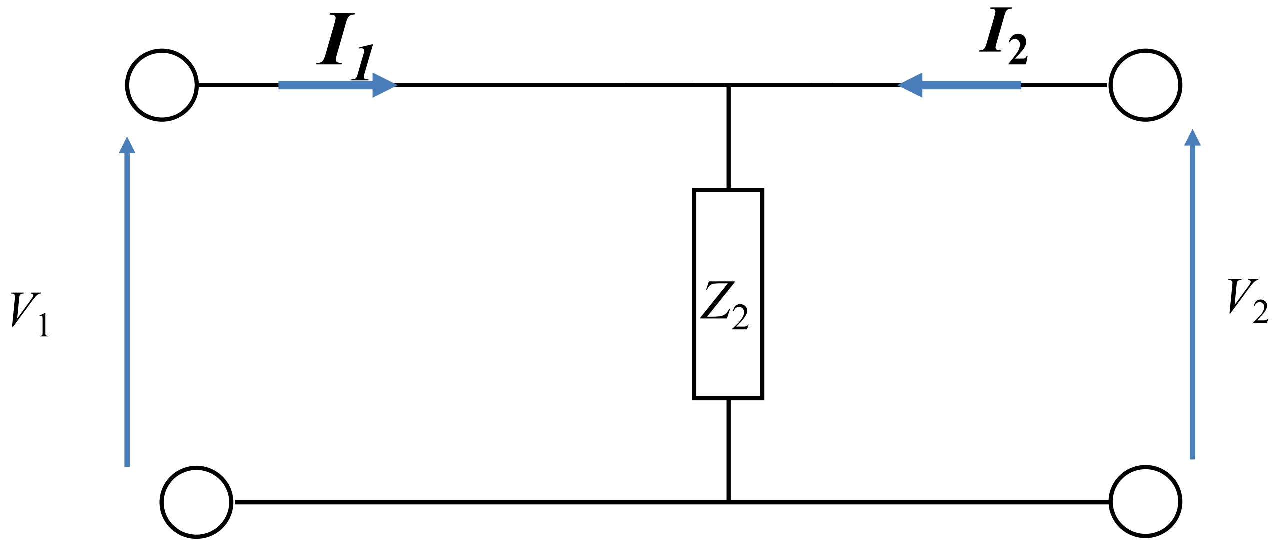
$$V_1 = Z_1 I_1 + Z_2 \left(I_1 + I_2 \right) = \left(Z_1 + Z_2 \right) I_1 + Z_2 I_2 \quad \cdots (4)$$

$$V_2 = Z_3 I_2 + Z_2 \left(I_1 + I_2 \right) = Z_2 I_1 + \left(Z_2 + Z_3 \right) I_2 \quad \cdots (5)$$

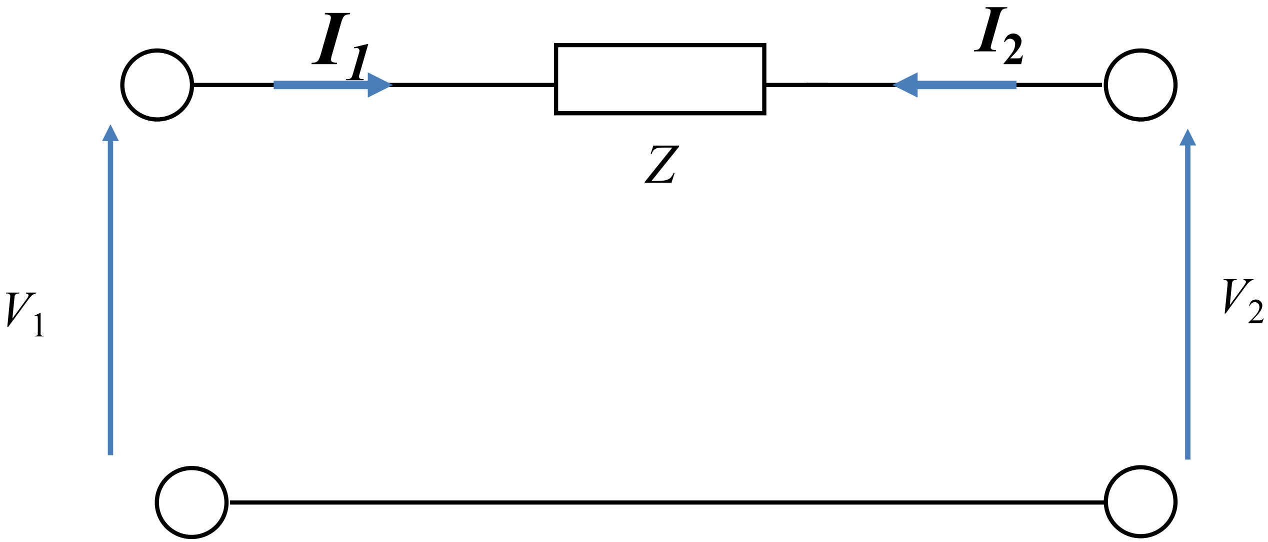
従って、Z行列は、

$$\mathrm{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

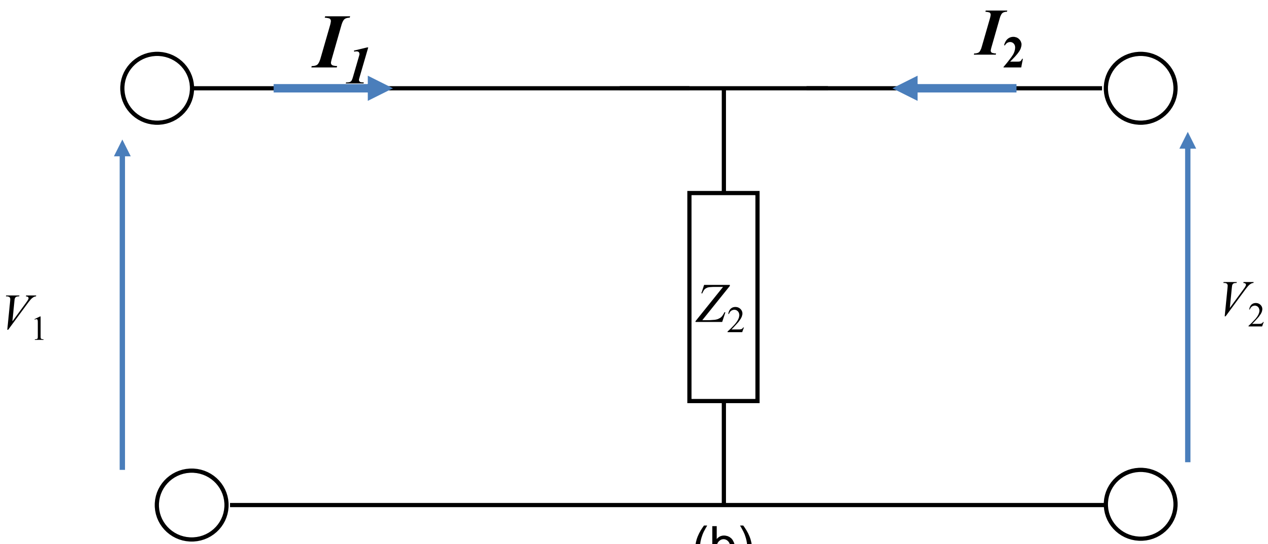
回路のZパラメータを求めよ



回路(a)(b)のZパラメータを求めよ

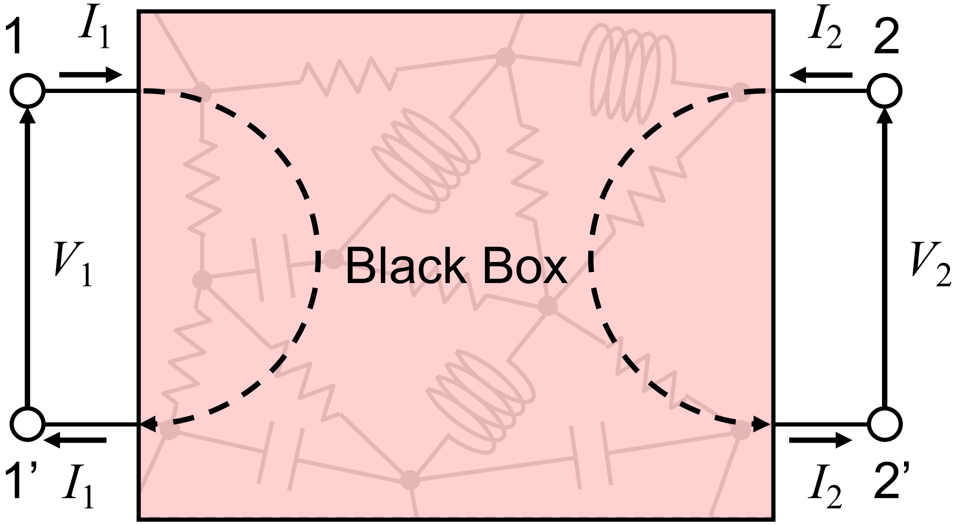


(a)



(b)

アドミタンス行列



端子2-2'を短絡してV_1 のみ印加した場合

$$I_1 = y_{11}\,V_1 \qquad I_2 = y_{21}\,V_1 \qquad V_2 = 0$$

端子1-1'を短絡してV_2 のみ印加した場合

$$I_1 = y_{12}\,V_2 \qquad I_2 = y_{22}\,V_2 \qquad V_1 = 0$$

重ね合わせの原理より、

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= y_{11}\,V_1 + y_{12}\,V_2 \\ I_2 &= y_{21}\,V_1 + y_{22}\,V_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}}_{\text{アドミタンス行列（Y行列）}} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow I = YV$$

相反回路なら

$Y = {}^{t}Y$

転置行列

$y_{11}, y_{22}, y_{12}, y_{21}$はアドミタンスパラメータ

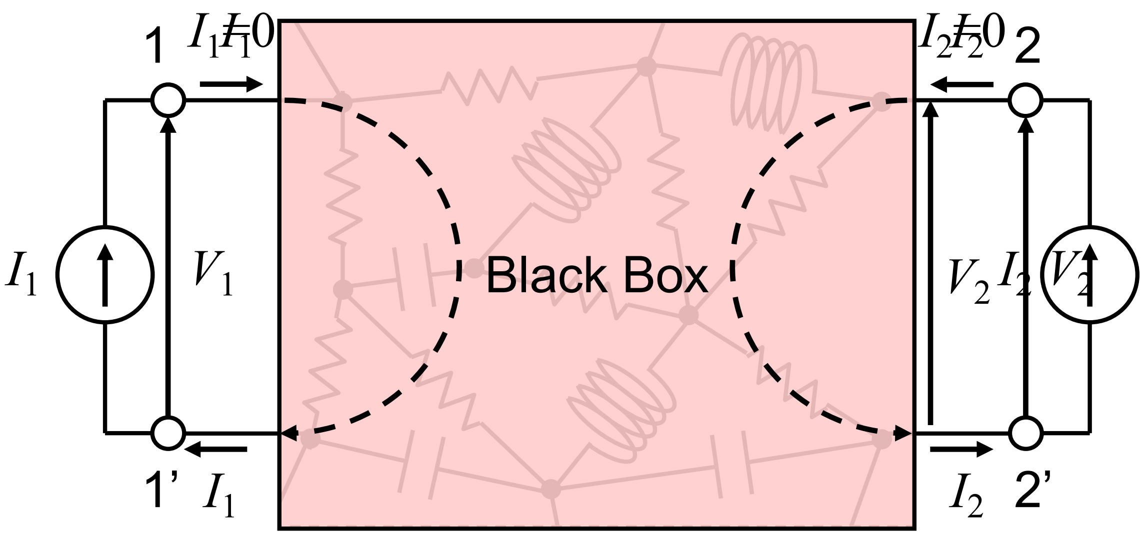
（または、Yパラメータ）

相反回路ならば、$y_{12} = y_{21}$

もし、$y_{11} = y_{22}$なら、二端子対網は対称

つまり、入力と出力を逆にしても回路は同じように働く

インピーダンス行列



端子2-2'を開放して I_1 のみ流した場合

$$V_1 = z_{11} I_1 \qquad V_2 = z_{21} I_1 \qquad I_2 = 0$$

端子1-1'を開放して I_2 のみ流した場合

$$V_1 = z_{12} I_2 \qquad V_2 = z_{22} I_2 \qquad I_1 = 0$$

重ね合わせの原理より、

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 &= z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}}_{\text{インピーダンス行列（Z行列）}} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow V = ZI$$

相反回路なら

$Z = {}^{\mathrm{t}}Z$

転置行列

$z_{11}, z_{22}, z_{12}, z_{21}$はインピーダンスパラメータ

（または、Zパラメータ）

z_{11}, z_{22}: 開放駆動点インピーダンス

z_{12}, z_{21}: 開放伝達インピーダンス

相反回路ならば、$z_{12} = z_{21}$

もし、$z_{11} = z_{22}$なら、二端子対網は対称

Y行列とZ行列との関係

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}}_{I} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}}_{V} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}}_{V} = \underbrace{\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}}_{Z} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}}_{I} \qquad \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$$

$$I = YV \qquad V = ZI \qquad Z = Y^{-1}$$

<u>Y行列の求め方</u>

まず、出力端短絡($V_2 = 0$)で、V_1 を印加した場合の I_1 と I_2 を求める

$$y_{11} = I_1 / V_1 \qquad y_{21} = I_2 / V_1$$

次に、入力端短絡($V_1 = 0$)で、V_2 を印加した場合の I_1 と I_2 を求める

$y_{12} = I_1 / V_2 \qquad y_{22} = I_2 / V_2$　　相反回路なら、$y_{12} = y_{21}$となるはず

<u>Z行列の求め方</u>

まず、出力端開放($I_2 = 0$)で、I_1 を流した場合の V_1 と V_2 を求める

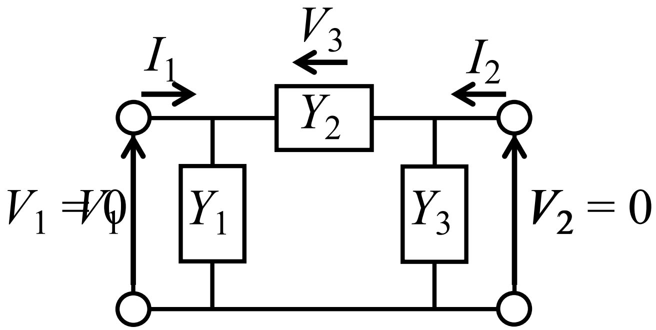
$$z_{11} = V_1 / I_1 \qquad z_{21} = V_2 / I_1$$

次に、入力端開放($I_1 = 0$)で、I_2 を流した場合の V_1 と V_2 を求める

$z_{12} = V_1 / I_2 \qquad z_{22} = V_2 / I_2$　　相反回路なら、$z_{12} = z_{21}$となるはず

π型回路のY行列

次のπ型回路のY行列を求めよ。(例題9.2)



まず、出力端短絡($V_2 = 0$)で、V_1 を印加した場合、

$$I_1 = (Y_1 + Y_2)V_1 \qquad \therefore \quad y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = Y_1 + Y_2$$

$$I_2 = -\frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} I_1 = -Y_2 V_1 \qquad \therefore \quad y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = -Y_2$$

従って、Y行列は、

$$\mathrm{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}$$

$y_{12} = y_{21}$ だから、相反回路

次に、入力端短絡($V_1 = 0$)で、V_2 を印加した場合、

$$I_1 = -\frac{Y_2}{Y_2 + Y_3} I_2 = -Y_2 V_2 \qquad \therefore \quad y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = -Y_2$$

$$I_2 = (Y_2 + Y_3)V_2 \qquad \therefore \quad y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = Y_2 + Y_3$$

別の求め方として、Y_2 の両端の電圧を図のようにV_3 と置くと、

$$V_1 = V_2 + V_3 \quad \cdots(1) \qquad I_1 = Y_1 V_1 + Y_2 V_3 \quad \cdots(2) \qquad I_2 = Y_3 V_2 - Y_2 V_3 \quad \cdots(3)$$

式(1)を式(2), (3)に代入して整理すると、

$$I_1 = Y_1 V_1 + Y_2 (V_1 - V_2) = (Y_1 + Y_2)V_1 - Y_2 V_2 \quad \cdots(4)$$

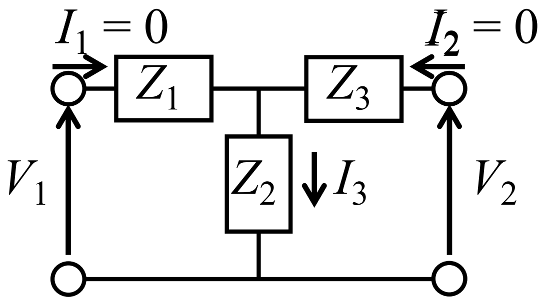
$$I_2 = Y_3 V_2 - Y_2 (V_1 - V_2) = -Y_2 V_1 + (Y_2 + Y_3)V_2 \quad \cdots(5)$$

従って、Y行列は、

$$\mathrm{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}$$

T型回路のZ行列

次のT型回路のZ行列を求めよ。(例題9.6)



まず、出力端開放($I_2 = 0$)で、電流 I_1 を流した場合、

$$V_1 = (Z_1 + Z_2)I_1 \qquad \therefore \quad z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = Z_1 + Z_2$$

$$V_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_1 = Z_2 I_1 \qquad \therefore \quad z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = Z_2$$

次に、入力端開放($I_1 = 0$)で、電流 I_2 を流した場合、

$$V_1 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} V_2 = Z_2 I_2 \qquad \therefore \quad z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = Z_2$$

$$V_2 = (Z_2 + Z_3)I_2 \qquad \therefore \quad z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = Z_2 + Z_3$$

従って、Z行列は、

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

$z_{12} = z_{21}$ だから、相反回路

別の求め方として、Z_2 に流れる電流を図のようにI_3 と置くと、

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad \cdots(1) \qquad V_1 = Z_1 I_1 + Z_2 I_3 \quad \cdots(2) \qquad V_2 = Z_3 I_2 + Z_2 I_3 \quad \cdots(3)$$

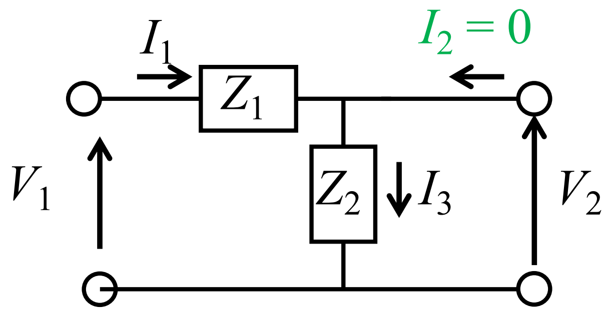
式(1)を式(2), (3)に代入して整理すると、

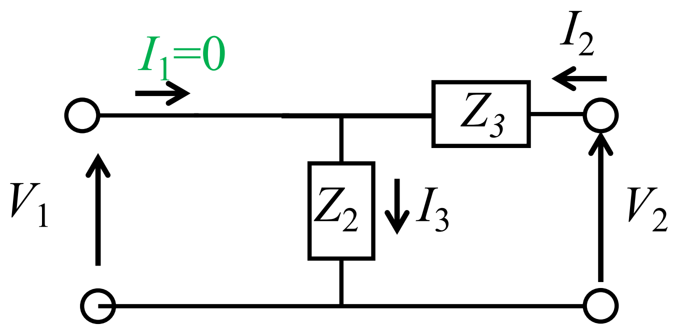
$$V_1 = Z_1 I_1 + Z_2(I_1 + I_2) = (Z_1 + Z_2)I_1 + Z_2 I_2 \quad \cdots(4)$$

$$V_2 = Z_3 I_2 + Z_2(I_1 + I_2) = Z_2 I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2 \quad \cdots(5)$$

従って、Z行列は、

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$


I_1
$I_2 = 0$
Z_1
V_1
Z_2
I_3
V_2


I_1=0
I_2
Z_3
V_1
Z_2
I_3
V_2