

基礎電氣回路CH-13

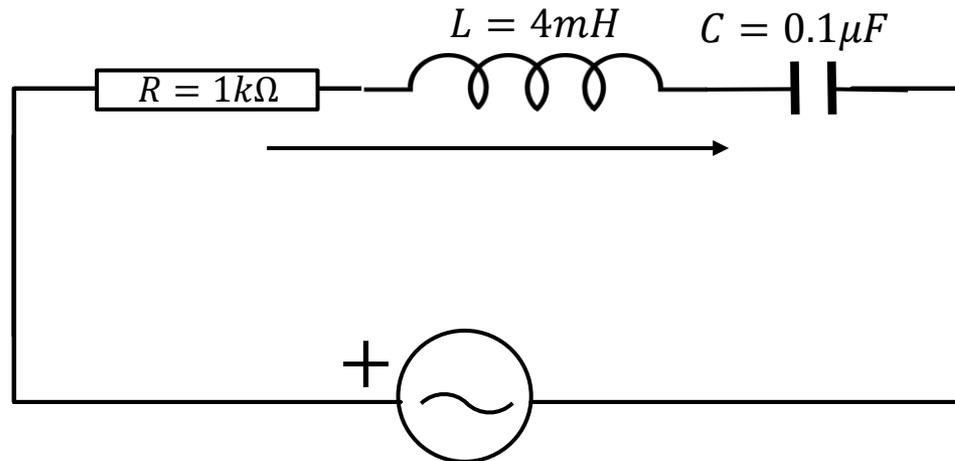
基礎電氣回路復習

図1の直列回路について以下の各小問に答えよ。なお電圧源の出力は $E = 100 \sin(\omega t) V$ である。また、電源出力は+記号側を正とし、電流は矢印の向きを正とする。

(1)この回路の共振角周波数(電流が最大となる角周波数) ω_r はいくらか。また共振時の回路の全インピーダンスの全複素数インピーダンス Z_r はいくらか。

(2)電圧源の角周波数が $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ の時、回路の全複素数インピーダンス Z を求めよ。

(3)共振時に回路に流れる電流値 $I_r(t)$ と各素子 R, L, C に掛かる電圧 $V_R(t), V_L(t), V_C(t)$ をそれぞれ答えよ(ω_r を用いて良い)。各素子に掛かる電圧は電流を示す矢印の上流側を正とする。

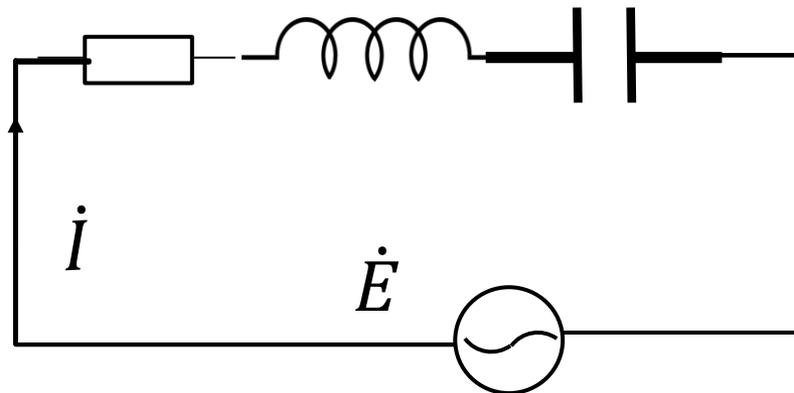


当問題、注意すべき箇所:

- ◎ 瞬時値→複素数表示→フェーザ表示
- ◎ XX の大きさ \Leftrightarrow フェーザ表示の実効値
- ◎ 共振の条件:
- ◎ 共振になった時、各素子の電圧の計算
- ◎ フェーザ表示で電圧を計算する必要性

R-L-C直列共振回路:

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ &= R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \\ &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\end{aligned}$$



$$= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \angle \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = Z \angle \theta$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

合成したインピーダンスの大きさと位相角を導けるように

解答分析:

(1) 電圧源の角周波数が $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ の時、回路の全複素数インピーダンス Z を求めよ。

$$\dot{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

複素数表示に
注意

$$\dot{Z} = 1000 + j10^4 * 4 * 10^{-3} + \frac{1}{j10^4 * 0.1 * 10^{-6}}$$

$$\dot{Z} = 1000 + j40 + \frac{1000}{j}$$

$$\dot{Z} = 1000 + j40 - 1000j$$

$$\dot{Z} = 1000 - 960j$$

複素数
表示

(2)この回路の共振角周波数(電流が最大となる角周波数) ω_r はいくらか。また共振時の回路の全インピーダンス Z_r はいくらか。

分 析

電流が最大となる \Leftrightarrow 電流の大きさを計算する必要がある!!!

電流の大きさを計算するために、 \dot{E} をフェーザ表示にしたほうがいいかと思います。

$$\dot{E} = E \angle \theta_E$$

実効値 位相角

$$\dot{Z} = Z \angle \theta_Z$$

実効値 位相角

$$i = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}} = \frac{E \angle \theta_E}{Z \angle \theta_Z} = \underbrace{\frac{E}{Z}}_{\text{実効値}} \angle \underbrace{\theta_E - \theta_Z}_{\text{位相角}}$$

$$i \text{の大きさ} = i \text{の実効値} = \frac{E}{Z}$$

$$i \text{の位相角は} \theta_E - \theta_Z$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\theta_Z = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$i \text{ の実効値(大きさ)} = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad [\text{A}]$$

$$i \text{ の位相角} = \theta_E - \theta_Z = \theta_E - \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

i の大きさ $\frac{E}{Z}$ が最大になるという条件を満たすために、

$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ になる必要がある。すなわち

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Z = R$$

値を式に代入して計算すると

$$\begin{aligned} \omega_r &= \frac{1}{\sqrt{4 * 10^{-3} * 0.1 * 10^{-6}}} = \frac{1}{2 * 10^{-5}} \\ &= 5 * 10^4 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$\dot{Z}_r = R = 1000\Omega$$

共振時: $Z_r = R = 1000\Omega$ $\omega_r = 50000\text{rad/s}$

◎ フェーザ表示

$$\dot{I}_r = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{50\sqrt{2}\angle 0^\circ}{1000\angle 0^\circ} = 0.05\sqrt{2}\angle 0^\circ \text{ [A]}$$

◎ 複素数表示

$$\dot{I}_r = 0.05\sqrt{2} e^{j\omega t + 0}$$

◎ 瞬時値

$$I_r(t) = 0.05\sqrt{2} * \sqrt{2} \sin(\omega t) = 0.1\sin(\omega t)$$

抵抗における電圧降下:

◎ フェーザ表示

$$\begin{aligned} \dot{V}_R &= R * \dot{I} = 1000 \angle 0^\circ * 0.05\sqrt{2} \angle 0^\circ \\ &= 50\sqrt{2} \angle 0^\circ \\ &\quad \text{実効値} \quad \text{位相角} \end{aligned}$$

◎ 瞬時値表示

$$V_r(t) = 50\sqrt{2} * \sqrt{2} \sin(\omega_r t + 0^\circ)$$

◎ 瞬時値表示

$$V_r(t) = 100 \sin(\omega_r t)$$

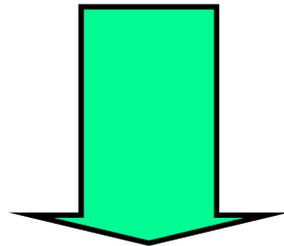
コイルにおける電圧降下:

◎ フェーザ表示

$$\dot{V}_L = j\omega L * \dot{I} = j * 4 * 10^{-3} * 50000 * 0.05\sqrt{2}\angle 0^\circ$$

$$\dot{V}_L = \angle 90^\circ * 10\sqrt{2}\angle 0^\circ = 10\sqrt{2}\angle 90^\circ$$

◎ 瞬時値表示



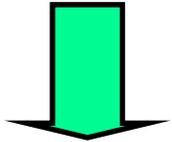
$$V_L(t) = 10\sqrt{2} * \sqrt{2} \sin(\omega_r t + 90^\circ)$$

$$V_L(t) = 20\cos(\omega_r t)$$

コンデンサにおける電圧降下:

$$\dot{V}_C = \frac{1}{j5 * 0.1 * 10^{-2}} * I = -j * 200 * 0.05\sqrt{2}\angle 0^\circ$$

$$\dot{V}_C = -\angle 90^\circ * 10\sqrt{2}\angle 0^\circ = -10\sqrt{2}\angle 90^\circ \quad (\times \odot)$$

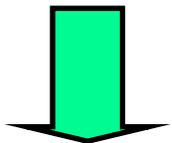


$$V_C(t) = -10\sqrt{2} * \sqrt{2}\sin(\omega_r t + 90^\circ)$$

◎ 瞬時値表示

$$V_C(t) = -20\cos(\omega_r t)$$

$$\dot{V}_C = \angle -90^\circ * 10\sqrt{2}\angle 0^\circ = 10\sqrt{2}\angle -90^\circ (\odot)$$



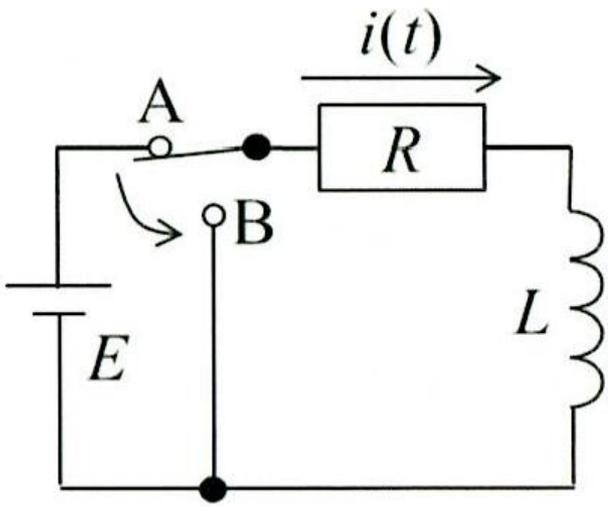
$$V_C(t) = 10\sqrt{2} * \sqrt{2}\sin(\omega_r t - 90^\circ)$$

◎ 瞬時値表示

$$V_C(t) = -20\cos(\omega_r t)$$

図のように出力電圧 E の直流電源、抵抗 R ,インダクタンス L がスイッチを介して接続された回路がある。時刻 $t < 0$ ではスイッチはAに繋がれて長い時間が経過しており、 $t = 0$ でAからBに切り替えた。回路に流れる電流 $i(t)$ (図の矢印方向を正とする)とした時、次の間に答えよ。

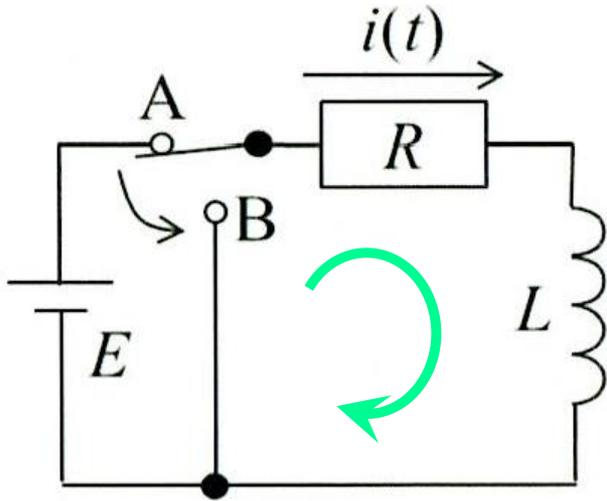
- 1) $t < 0$ における $i(t)$ を求めよ。
- 2) $t > 0$ における $i(t)$ を満たす微分方程式を、 $t > 0$ におけるキルヒホットの電圧則から求めよ。
- 3) 全問(4-1)と(4-2)より、 $t > 0$ における電流の式 $i(t)$ を求めよ。
- 4) $t = 0$ でスイッチを切り替えた時の過渡応答の時定数を求めよ。



1) $t < 0$ における $i(t)$ を求めよ。

$$i = \frac{E}{R}$$

2) $t > 0$ における $i(t)$ を満たす微分方程式を、 $t > 0$ におけるキルヒホッフの電圧則から求めよ。



$$i * R + L \frac{di}{dt} = 0$$

3) 全問(4-1)と(4-2)より、 $t > 0$ における電流の式 $i(t)$ を求めよ。

$$i * R + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{i} = \frac{-R}{L} dt$$

$$\ln(i) = \frac{-R}{L} t + C$$

$$i = C e^{\frac{-R}{L} t}$$

$$t = 0$$

$$i = \frac{E}{R}$$

$$C = \frac{E}{R}$$

$$i = \frac{E}{R} e^{\frac{-R}{L} t}$$

4) $t = 0$ でスイッチを切り替えた時の過渡応答の時定数を求めよ。

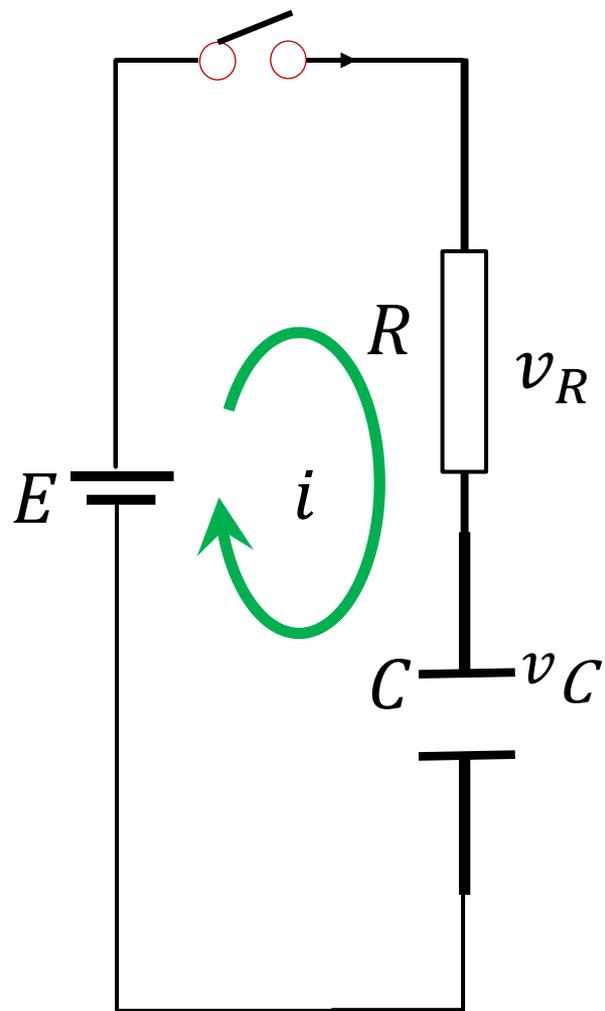
$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \longrightarrow i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

指数の部分を変形する:

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{L/R}}$$

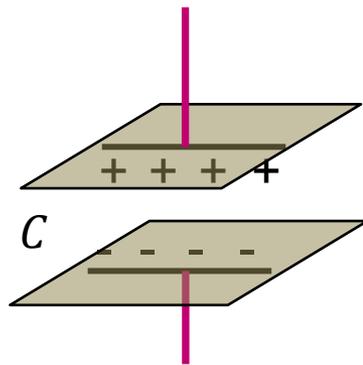
$$\tau = \frac{L}{R}$$

RC直列回路における過渡応答現象



$$v_R + v_C - E = 0$$

$$v_R + v_C = E$$



$$v_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$i = C \frac{dv_C}{dt}$$

RC直列回路における過渡応答現象

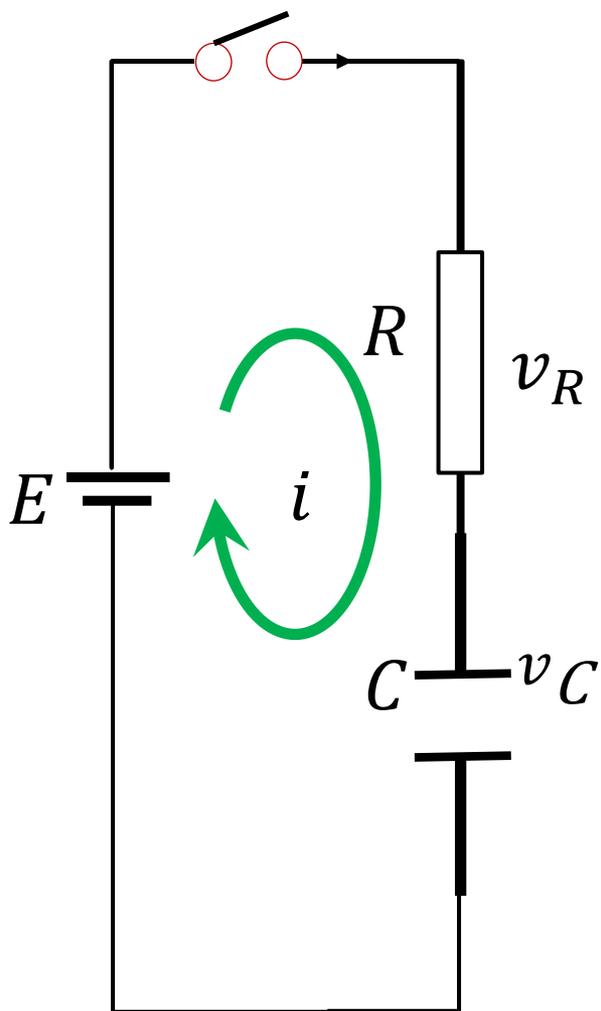
$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E$$

$$q = \int_0^t i dt \quad i = \frac{dq}{dt} \quad q = Cv_c$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

$$RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = E$$

□ 定常解

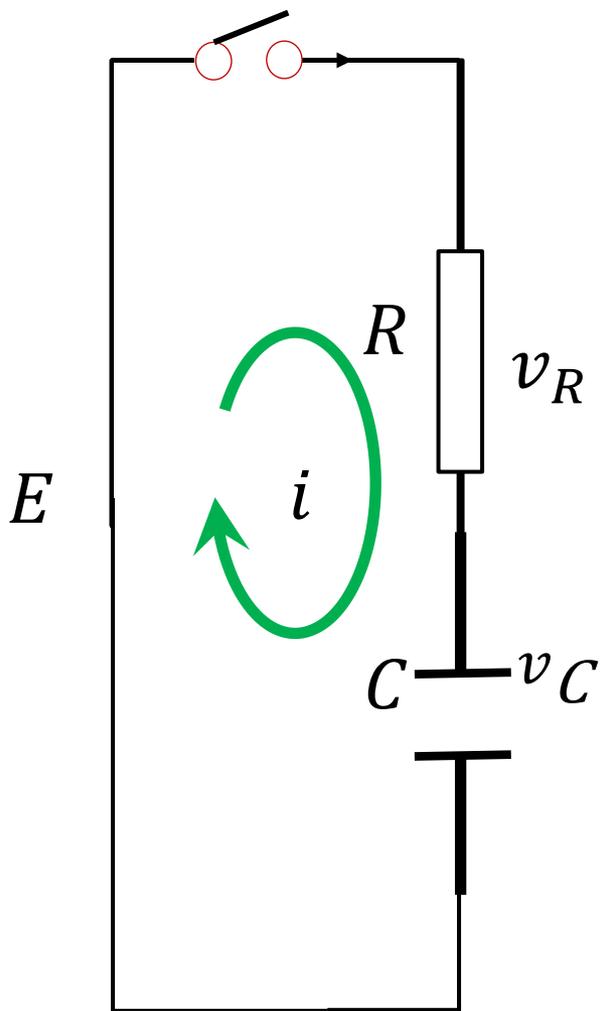


$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = E$$

$$\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$v_C = E$$

□ 過渡解



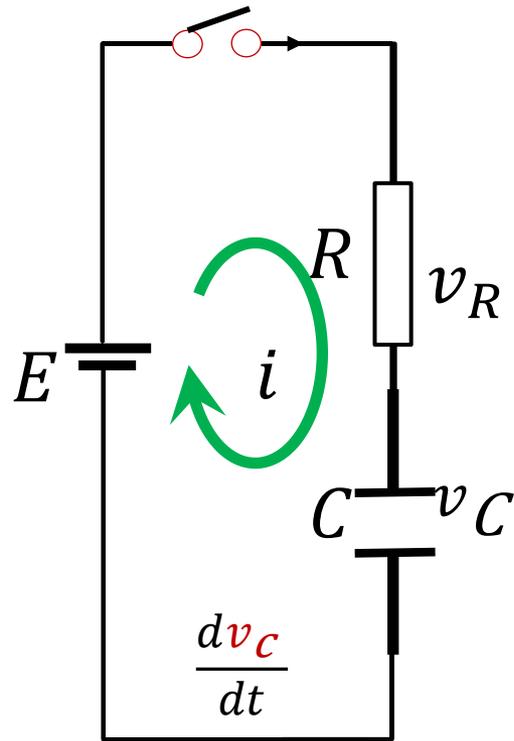
$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

$$\frac{dv_C}{v_C} = -\frac{1}{CR} dt$$

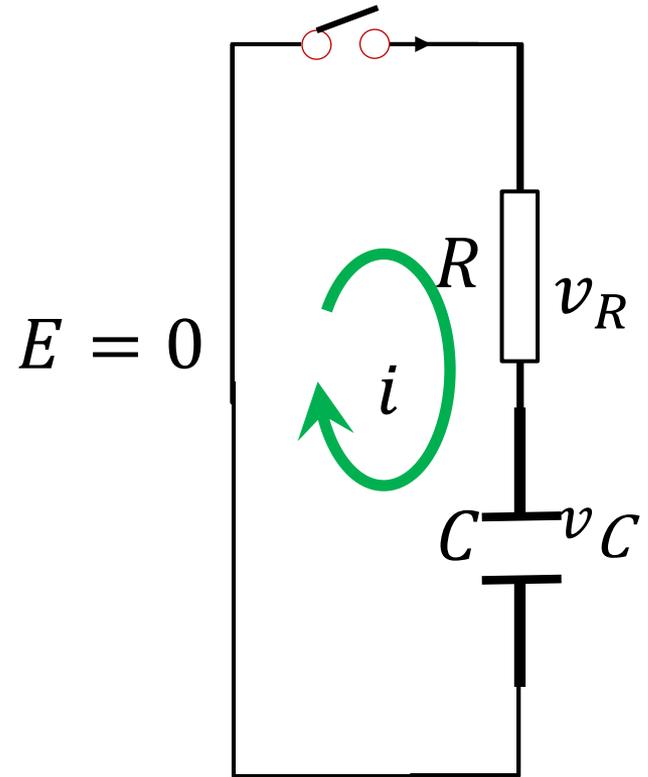
$$v_C = Ae^{-\frac{1}{CR}t}$$

□ 一般解 = 過渡解 + 定常解

$$v_C = E$$



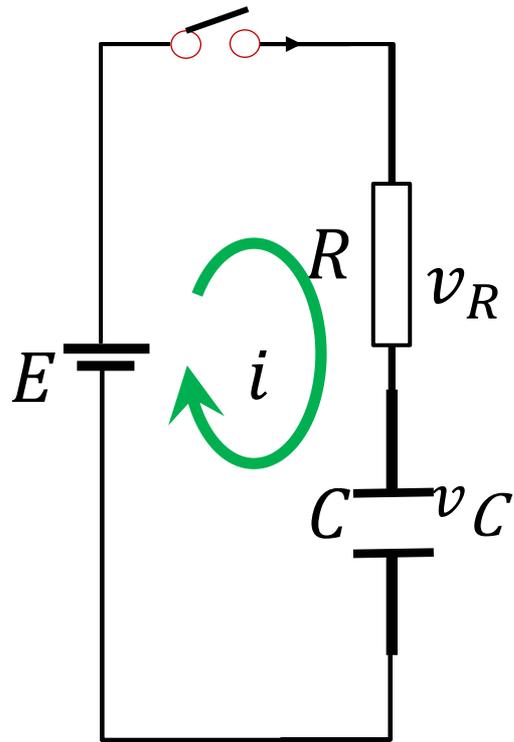
$$v_C = Ae^{-\frac{1}{CR}t}$$



$$v_C = E + Ae^{-\frac{1}{CR}t}$$

□ 初期条件から定数Aを決める:

$$v_C = E + Ae^{-\frac{1}{CR}t}$$



初期条件: $t = 0^-$

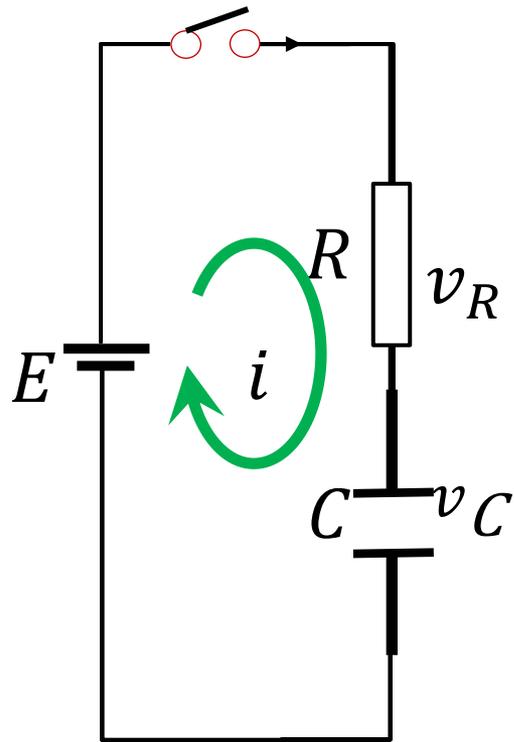
キャパシタンスCの初期電荷

$$q = 0$$

$$v_C = \frac{q}{C} = 0 \quad (t = 0^-)$$

□ 完全解:

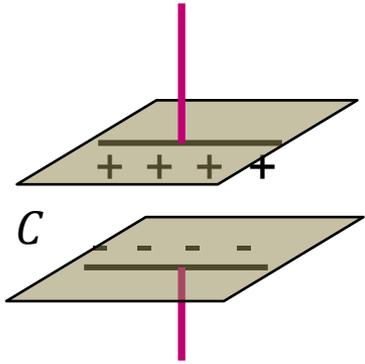
$$0 = E + A \rightarrow A = -E$$



$$v_C = E + Ae^{-\frac{1}{CR}t}$$

$$v_C = E - Ee^{-\frac{1}{CR}t}$$

電流*i*を決める:



$$V = \frac{1}{C} \int i dt \quad \rightarrow \quad i = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_C = E - E e^{-\frac{1}{CR}t}$$

$$i = C \frac{dv_C}{dt} = -EC * \frac{-1}{CR} e^{-\frac{1}{CR}t}$$

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{CR}t}$$

類似の問題で、もしコイルではなくコンデンサになったらどうなるか？

教科書の136ページ目の例題を参考にしてください



136ページ

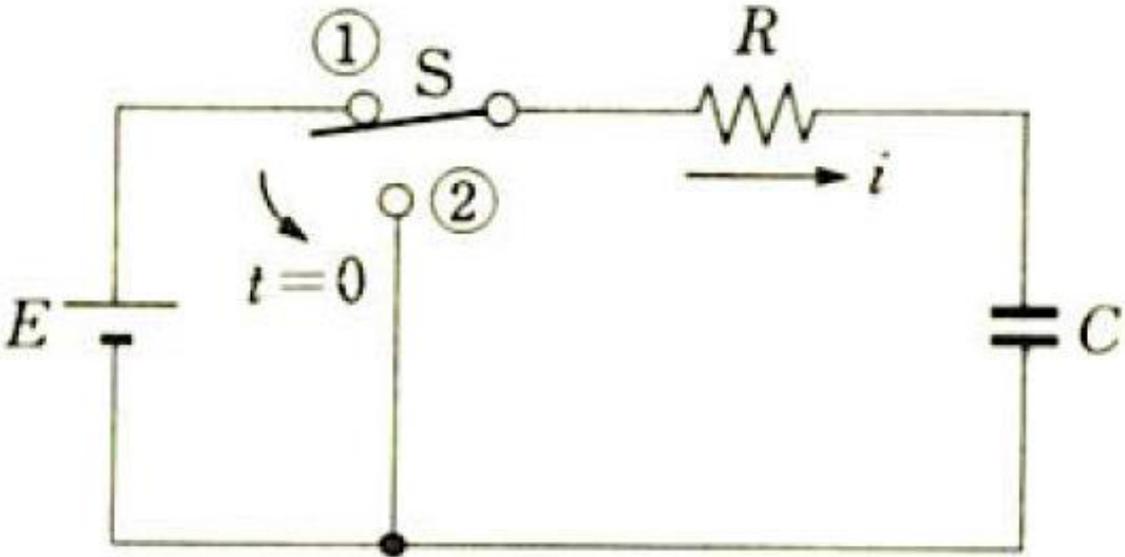


図 7・8 $R-C$ 直列回路の短絡

[2] コンデンサの放電

図7・8に示すように、 R - C 直列回路がある。スイッチ S を初め①に入れておき、定常状態になった後、②側に投入したとすると次式が成立する。

$$0 = Ri + \frac{1}{C} \int idt \quad (7 \cdot 20)$$

i の方向は充電であるから $i = dq/dt$ となり、式(7・20)は

$$0 = R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q \quad (7 \cdot 21)$$

式(7・21)は式(7・8)と同形であるので

$$q = Ke^{-(1/RC)t} \quad (7 \cdot 22)$$

となる。次に初期条件を考える。 $t = 0 -$ でコンデンサ C のの端子電圧 V_C は E 、したがって、コンデンサ C の電荷 q_0 は $t = 0 -$ と $t = 0 +$ では変化がないから、 $t = 0$ で $q = CE$ となる。この初期条件を式(7・22)に入れて

$$K = CE \quad (7 \cdot 23)$$

となるので、式(7・22)は

$$q = CEe^{-(1/RC)t} \quad (7 \cdot 24)$$

となる。電荷 q の時間的变化を図7・9に示す。

電流 i の時間的变化は

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} (CEe^{-(1/RC)t}) \\ &= CE \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-(1/RC)t} = -\frac{E}{R} e^{-(1/RC)t} \end{aligned} \quad (7 \cdot 25)$$

となる。放電電流 i の符号が $-$ になっているのは、充電時の電流の方向と逆向きになっているからである。放電電流 i の時間的变化を図7・10に示す。

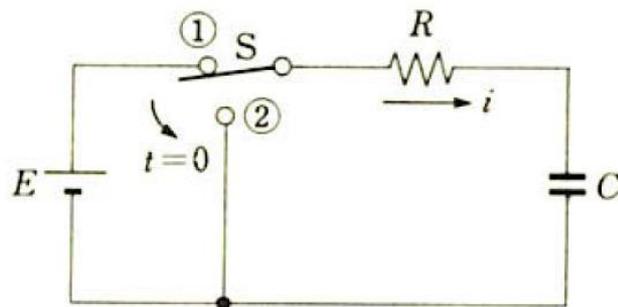
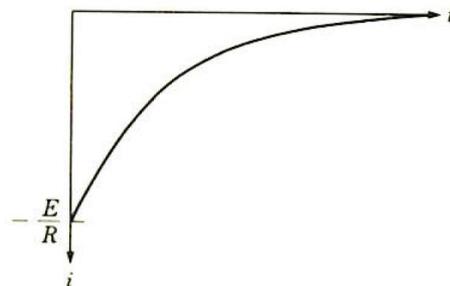
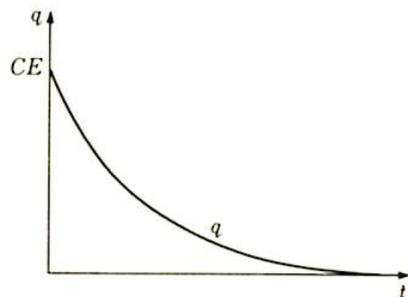


図7・8 R - C 直列回路の短絡



問題 起電力 E (実効値)、内部抵抗 r の交流電源がある。以下の問いに答えよ。

(1) 図1のようにこの電源に負荷抵抗 R を接続して最大の電力を取り出す (負荷抵抗で消費される電力を最大にする) には R の値はいくらであればよいか。

(2) 上問(1) の条件に合う負荷抵抗がなかったため、理想トランスを図2のように接続して最大の電力を取り出すことにした。トランスの巻線比 N_2 / N_1 を r および R を用いて表せ。

(3) 上問(2)の条件のとき、負荷抵抗 R に流れる電流の実効値 I_e を E 、 R 、 r を用いて表せ。

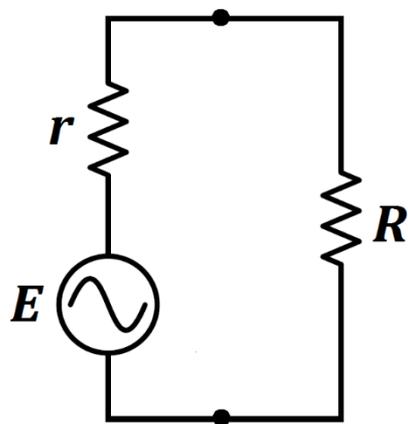


図1

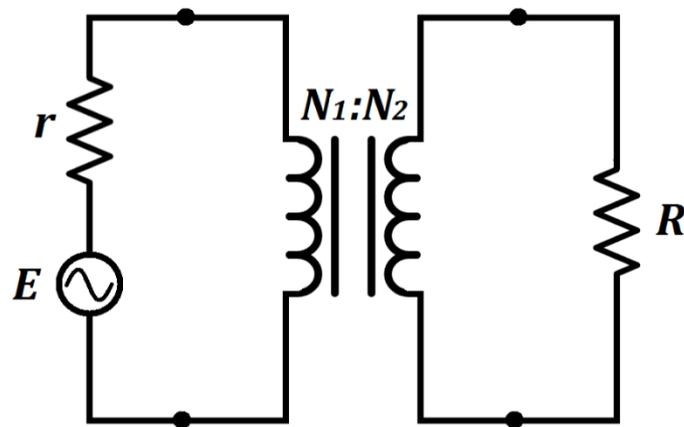


図2

電力が最大値になる条件を満たすために

$$P = VI = \frac{RE^2}{(r+R)^2} = \frac{E^2}{\left(\frac{r}{\sqrt{R}} + \sqrt{R}\right)^2} \quad E \text{は実効値です}$$

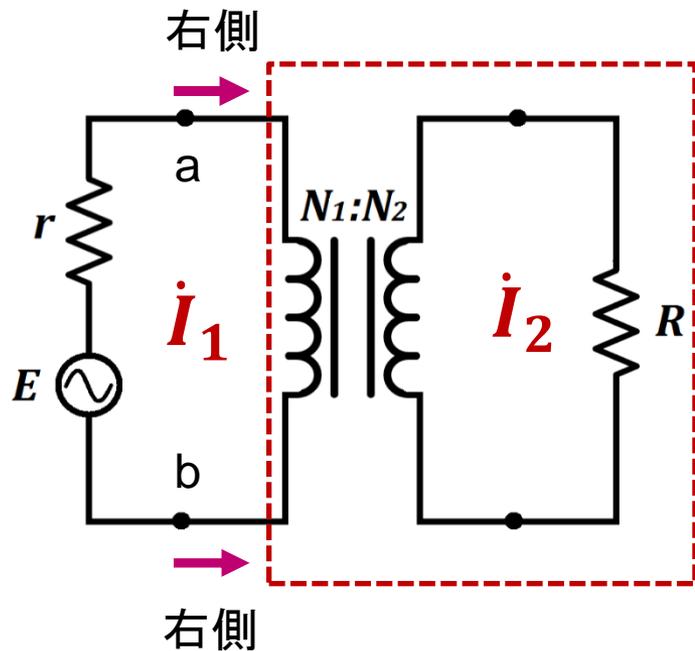
P_{max} になるというのは $T = \frac{r}{\sqrt{R}} + \sqrt{R}$ が最小になると等しいです

$$T = a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$T_{min} = 2\sqrt{r}$ から $R = r$ になることがわかる

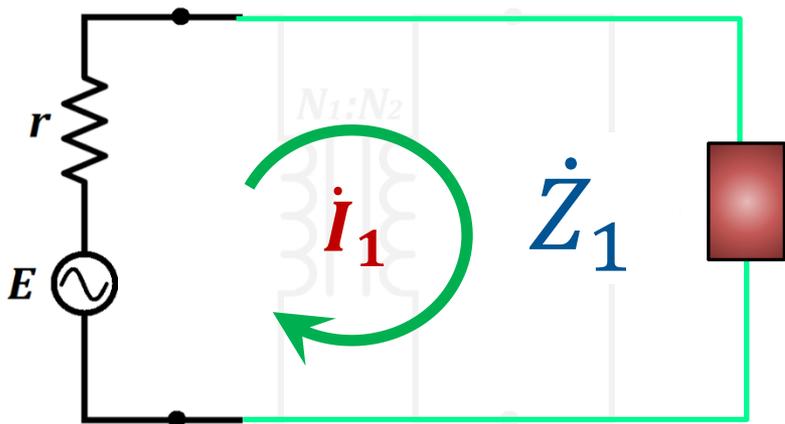
$$P_{max} = \frac{E^2}{4r}$$

1次側のab から見た右側の等価回路



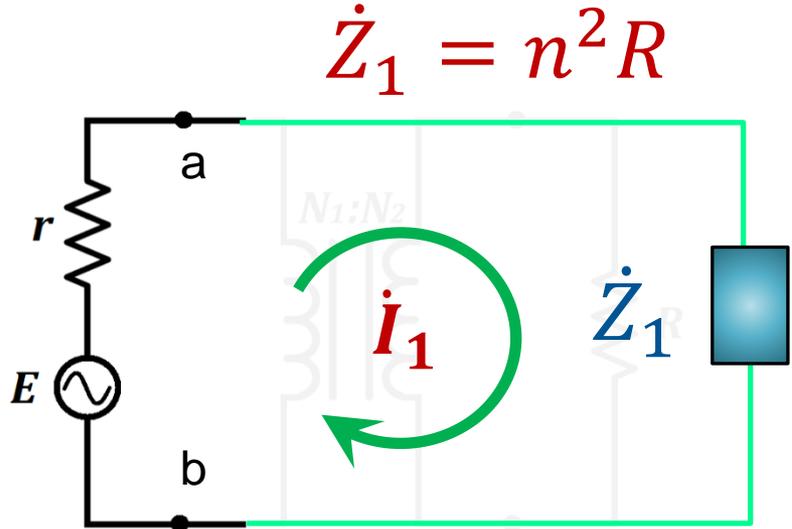
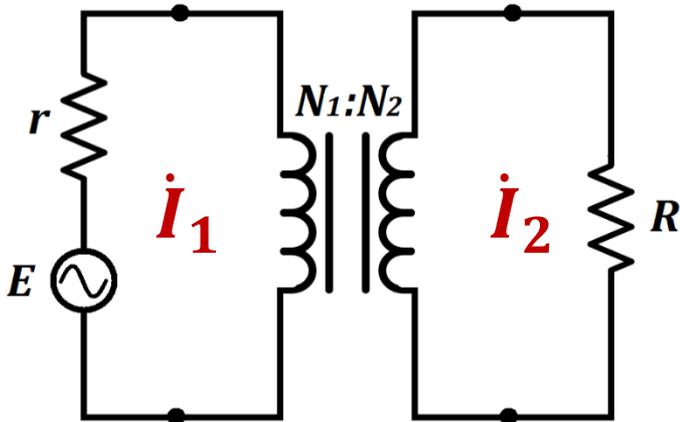
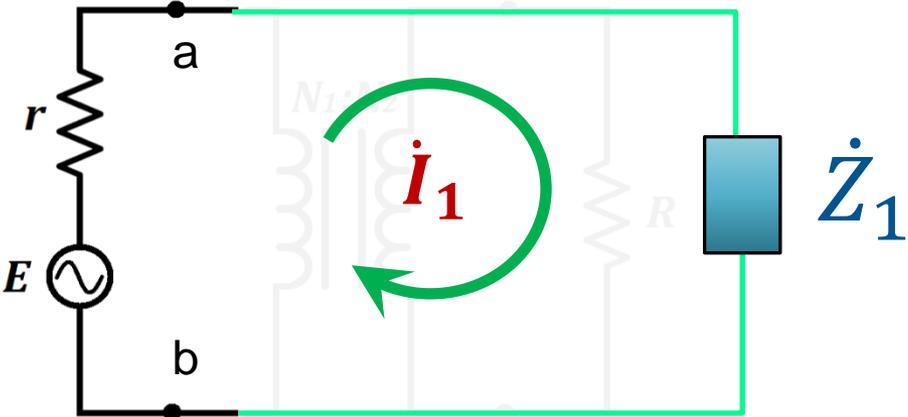
最重要ポイント

等価回路を使って
計算した電流 i_1 は
1次側の電流になる。

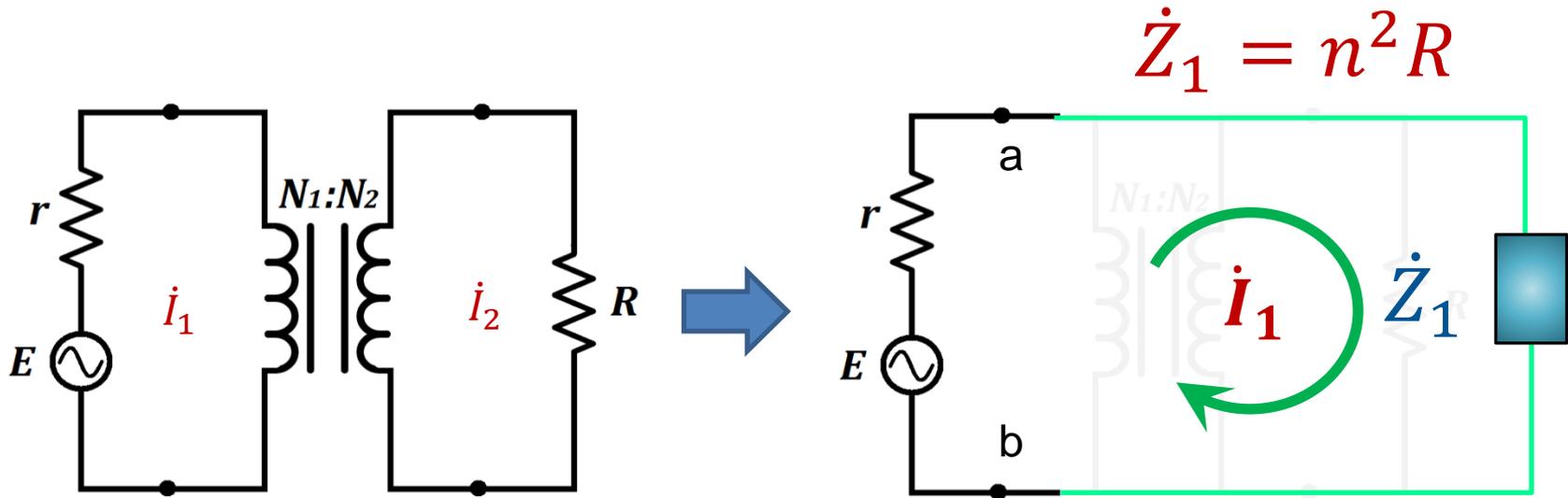


Z_1 : 等価インピーダンス

理想トランス等価回路における抵抗の関係式



負荷Rにおける電力の計算:



$$i_1 = \frac{E}{r + n^2 R}$$

$$i_2 = \frac{E}{r + n^2 R} * n$$

$$I_2 = \frac{E}{r + n^2 R} * n$$

$$P = I_2^2 * R$$

$$P = \left(\frac{E}{r + n^2 R} * n \right)^2 * R$$

$$P = \frac{n^2 R}{(r + n^2 R)^2} * E^2$$

$n^2 R$ をS 仮定すると

$$P = \frac{S}{(r + S)^2} * E^2 \quad \rightarrow \quad P = \frac{S}{\left(\frac{r}{\sqrt{S}} + \sqrt{S}\right)^2} * E^2$$

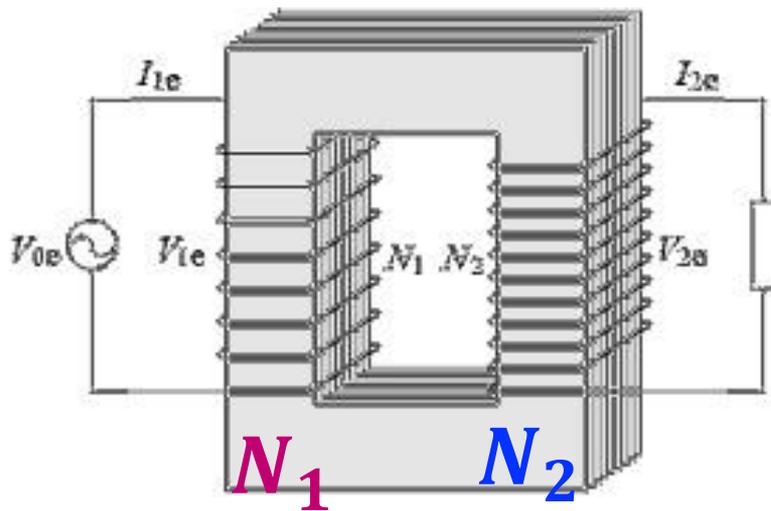
P_{max} になるというのは $T = \frac{r}{\sqrt{S}} + \sqrt{S}$ が最小になると等しいです

不等式定理: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$T_{min} = 2\sqrt{r}$ から $s = r$ になることがわかる

$$n^2 R = r \quad n = \sqrt{\frac{r}{R}}$$

理想トランスにおける電流、電圧と巻数の関係式：



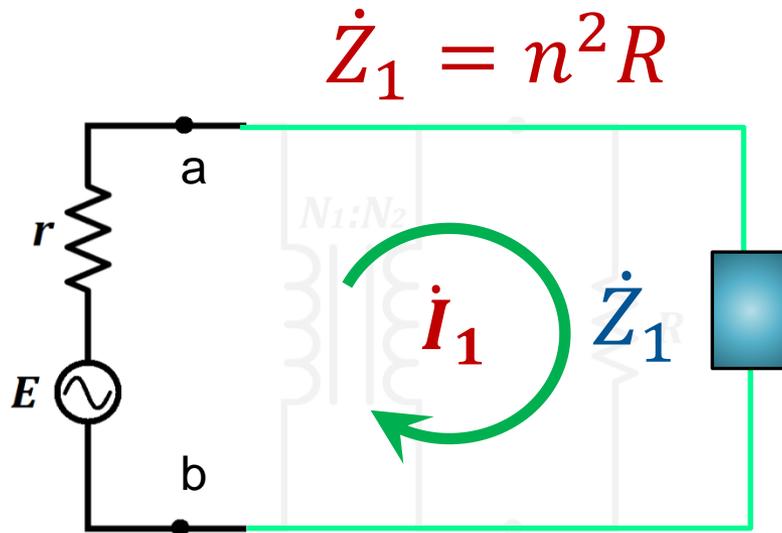
$$\frac{N_1}{N_2} = n$$

$$i_2 = n i_1$$

1次側

2次側

$$\dot{V}_1 = n \dot{V}_2$$

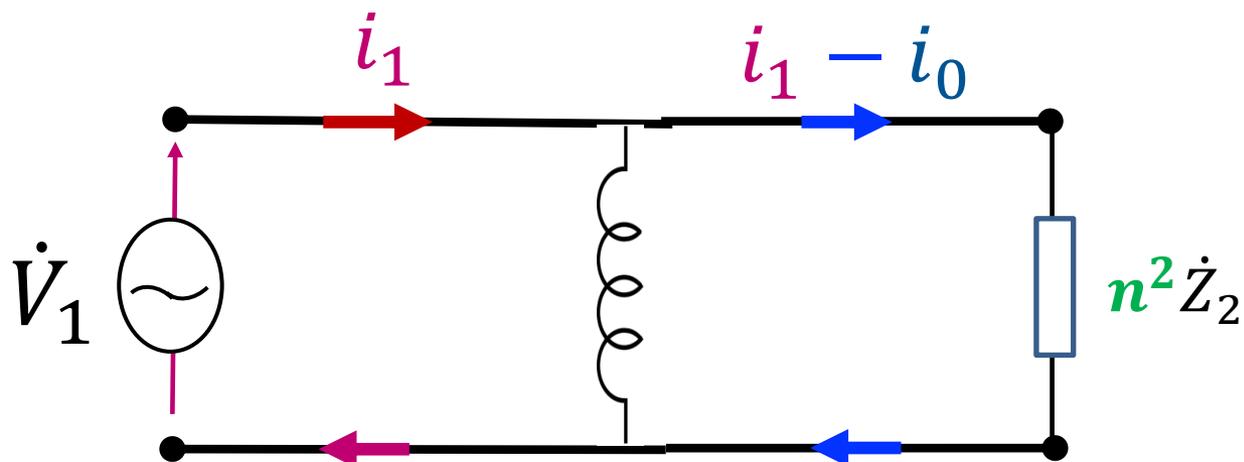


$$I_1 = \frac{E}{r + r} = \frac{E}{2r}$$

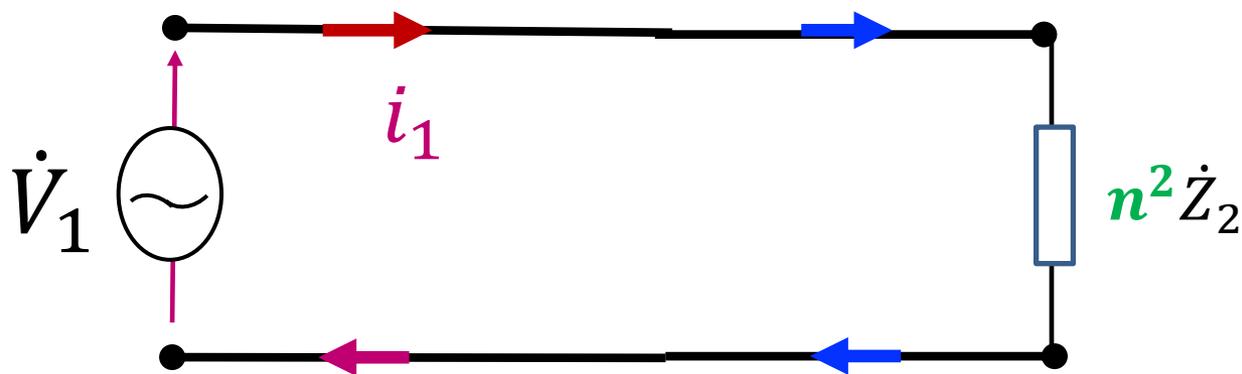
$$I_2 = n I_1$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{r}{R}} * \frac{E}{2r} = \frac{E}{2} \sqrt{\frac{1}{Rr}}$$

理想變壓器：



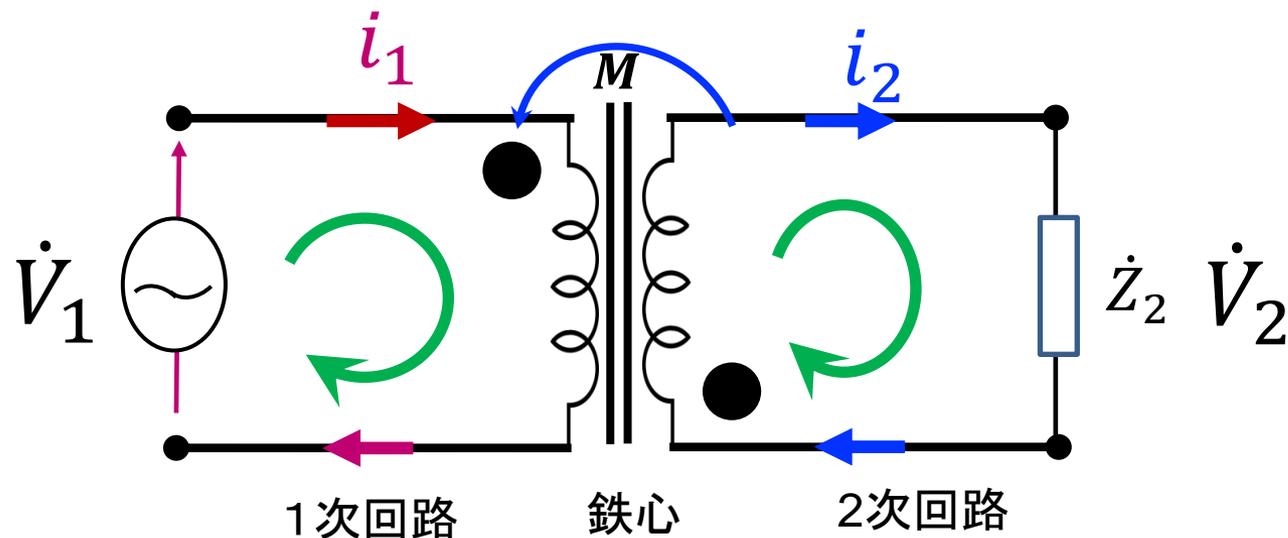
$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad \dot{Z}_1 = n^2 \dot{Z}_2$$



理想回路

變壓器結合回路：電流關係

理想變壓器

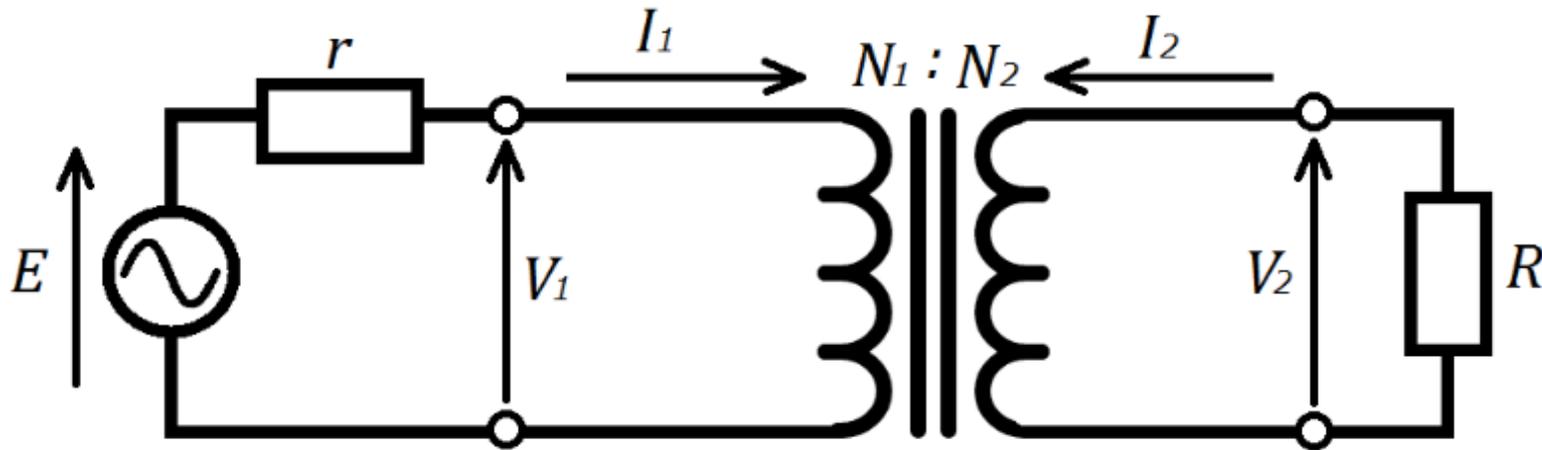


$$\dot{Z}_1 = n^2 \dot{Z}_2$$

$$i_2 = \frac{\dot{V}_2}{\dot{Z}_2} = \frac{\frac{1}{n} \dot{V}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{\frac{1}{n} \dot{V}_1}{\frac{1}{n^2} \dot{Z}_1} = n i_1$$

図に示す理想変成器を含む回路について以下の問いに答えよ。ただし、 $r = 4[\Omega]$ 、 $R = 4[\Omega]$ 、交流電圧源 $E = 200e^{j\omega t}$ [V]、巻数比 $N_1:N_2 = 2:1$ とする。

- (1) 変成器 1 次側から見たインピーダンス Z_1 を求めよ。
- (2) 電源から見たインピーダンス Z_E を求めよ。
- (3) 1 次側電流 I_1 と 2 次側電流 I_2 をそれぞれ求めよ。
- (4) 1 次側電圧 V_1 と 2 次側電圧 V_2 をそれぞれ求めよ。
- (5) 抵抗 r および R で消費される電力 P_r および P_R をそれぞれ求めよ。



解答

(1) 1次側と2次側の電圧と電流の関係は以下の通りである。

ここで、巻数比 $N_1:N_2 = 2:1$ より $1:n = 2:1$ つまり $n = \frac{1}{2}$ となる。

したがって、1次側から見たインピーダンス $Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = -\frac{1}{n^2} \frac{V_2}{I_2} = \frac{R}{n^2} = 4R = 16 [\Omega]$ となる。

(2) 電源から見たインピーダンス $Z_E = r + Z_1 = 4 + 16 = 20 [\Omega]$ となる。

(3) **1次電流** $I_1 = E/Z_E = 200/20 = 10 [\text{A}]$ 、**2次電流** $I_2 = -I_1/n = -2 \times 10 = -20 [\text{A}]$ となる。

(4) 1次電圧 $V_1 = Z_1 I_1 = 16 \times 10 = 160 [\text{V}]$ 、2次電圧 $V_2 = n V_1 = \frac{1}{2} \times 160 = 80 [\text{V}]$ となる。

(5) 抵抗 r で消費される電力 $P_r = r |I_1|^2 = 4 \times 10^2 = 400 [\text{W}]$

また、抵抗 R で消費される電力 $P_R = R |I_2|^2 = 4 \times 20^2 = 1600 [\text{W}]$ となる。

問6: 図の回路について以下の問いに答えよ。交流電源の起電力は+記号がある方を正とする。また、 $V_1 = 5\angle 0^\circ$ [V]

$V_2 = 8\angle 90^\circ$ [V]、 $E = E_0\angle \alpha$ [V]であり、 $Z_1 = 10$ [Ω]、 $Z_2 = 15$ [Ω]、 $Z_3 = 2$ [Ω]、 $Z_4 = 2$ [Ω]とする。

(1) C点に対するA点の電位 V_{AC} をフェーザ表示で答えよ。

(2) B点に対するC点の電位 V_{CB} をフェーザ表示で答えよ。

(3) 図1の回路の等価回路を図2とするととき、Eおよび Z_0 を求めよ。また $\tan(\alpha)$ の値も求めよ。

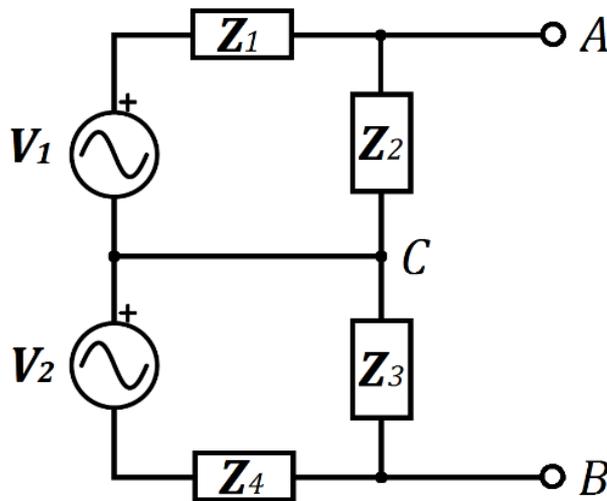


図1

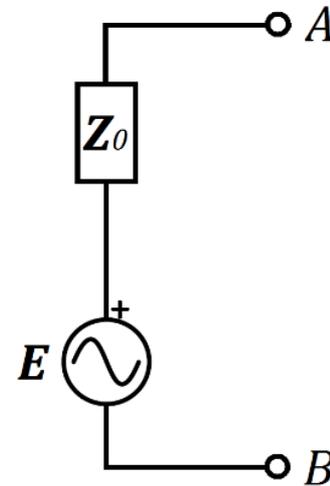
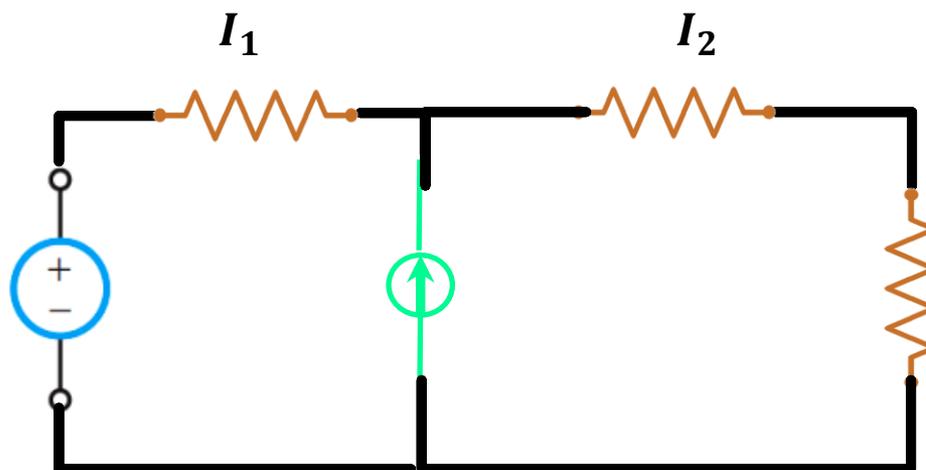


図2

重ねの理 (superposition theorem):

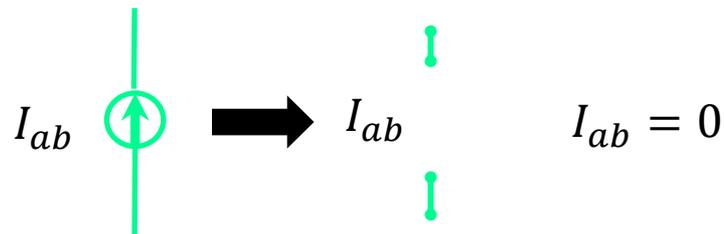
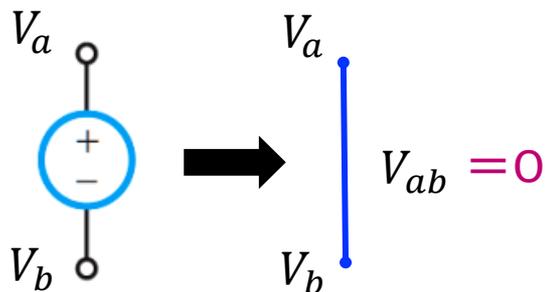


電圧源 → 短絡状態

電流源 → 開放状態

電圧源を外す → 電圧 $V_{ab} = 0$

電流源を外す → 電流 $I_{ab} = 0$



テブナン等価回路:

テブナン等価回路の V_0 、 R_0 を求めるために

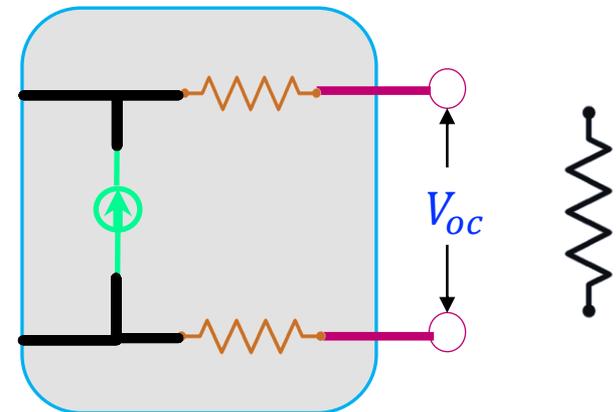
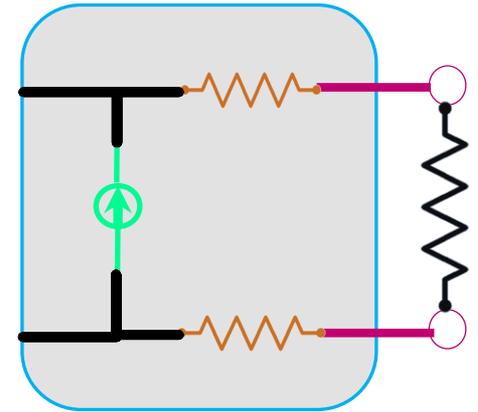
- 抵抗を回路から外す(もしあれば)、電源も回路から外す! 外し方は重ねの理と同じです。

等価抵抗 R_0 を計算する

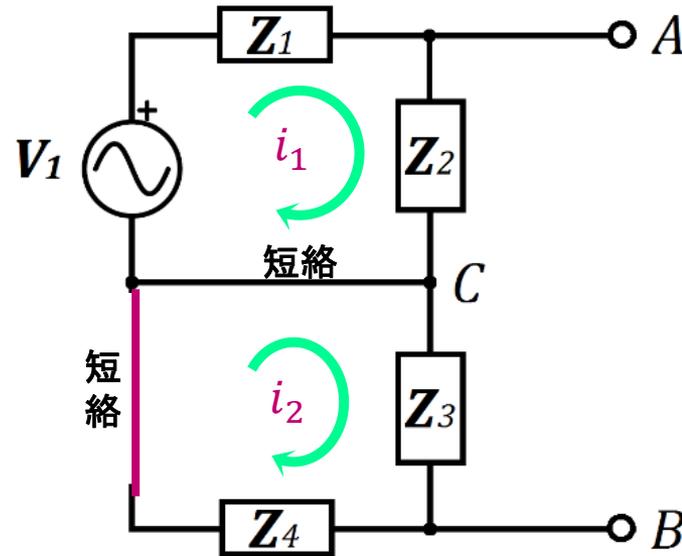
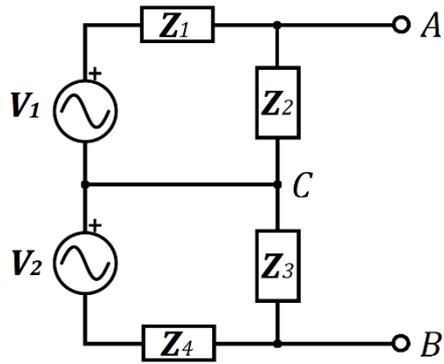
- 回路の出力端子間の電圧を計算する:

等価電圧 V_0 を計算する

計算方法はなんでもいい; 節点解析、ループ解析、分圧、分流と電源変換等



(1) V_2 を短絡させ、 V_1 だけを考える。閉回路に対するキルヒホッフの法則より、流れる電流を i_1 とすると、



Loop2において、 $i_2 = 0$

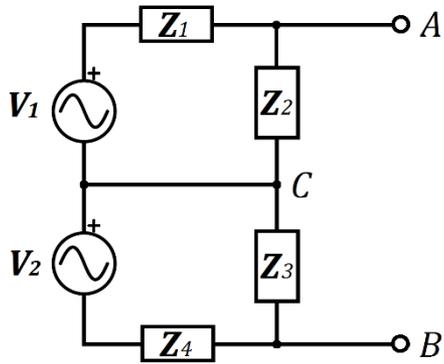
Loop1において、KVL法則

$$V_1 = (Z_1 + Z_2) i_1$$

$$i_1 = \frac{V_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{5\angle 0^\circ}{10 + 15} = \frac{1}{5}\angle 0^\circ$$

$$V_{AC} = Z_2 i_1 = 3\angle 0^\circ$$

(1) V_1 を短絡させ、 V_1 だけを考える。閉回路に対するキルヒホッフの法則より、流れる電流を i_1 とすると、

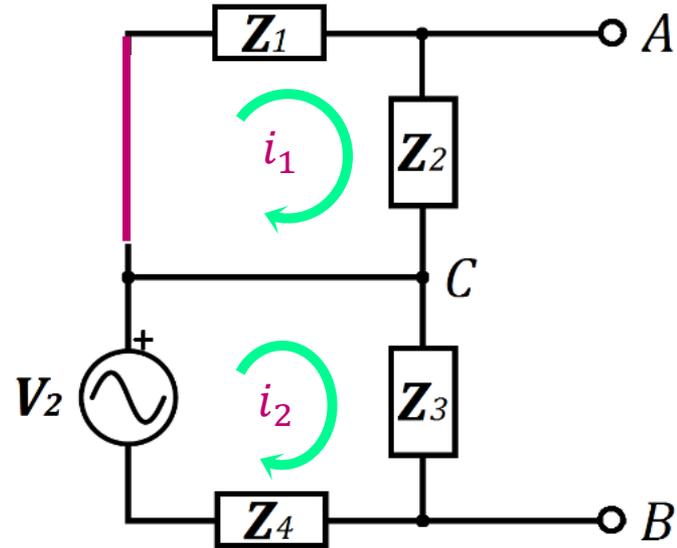


Loop1において、 $i_2 = 0$

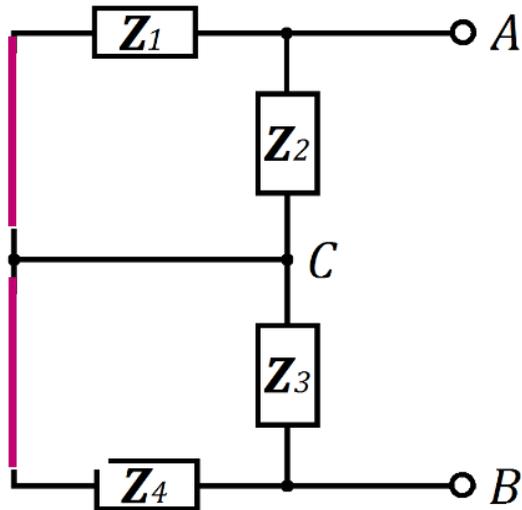
Loop2において、KVL法則

$$V_2 = (Z_3 + Z_4) i_2$$

$$i_2 = \frac{V_2}{Z_3 + Z_4} = \frac{8\angle 90^\circ}{2 + 2} = 2\angle 90^\circ$$



$$V_{CB} = Z_3 i_2 = 4\angle 90^\circ$$



$$V_{AB} = V_{AC} + V_{CB} = 3\angle 0^\circ + 4\angle 90^\circ$$

$$V_{AB} = 3 + j4 = 5\angle \alpha [\text{V}]$$

$$\text{ただし } \tan(\alpha) = \frac{4}{3}$$

AB端子間の合成抵抗を考える。2つの電圧源を短絡させると、 Z_1 と Z_2 の並列と Z_3 と Z_4 の並列の直列回路となる。したがって、AB端子間の合成抵抗 Z_0 は、

$$Z_0 = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right)^{-1} = 7[\Omega]$$