

基礎電気回路CH-5

複素数表記 対 三角関数表記

$$i = \frac{E_e}{L} \int e^{j(\omega t + \theta_v)} dt$$

$$i = \frac{E_e}{L} \int E_m \sin(\omega t + \theta_v) dt$$

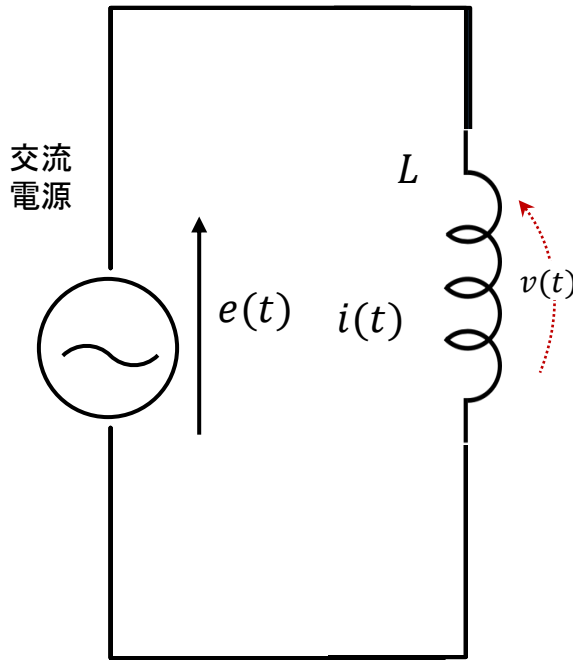
$$A = \int e^{jx} dx = \frac{1}{j} e^x$$

$$A = \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$A = \frac{de^{jx}}{dx} = je^x$$

$$A = \frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x)$$

交流回路要素を複素数で表現：インダクタ



$$e(t) = \sqrt{2} E_e \sin(\omega t + \theta_v)$$

$$\dot{E} = E_e e^{j(\omega t + \theta_v)}$$

$$i = \frac{1}{L} \int \dot{E} dt = \frac{E_e}{L} \int e^{j(\omega t + \theta_v)} dt$$

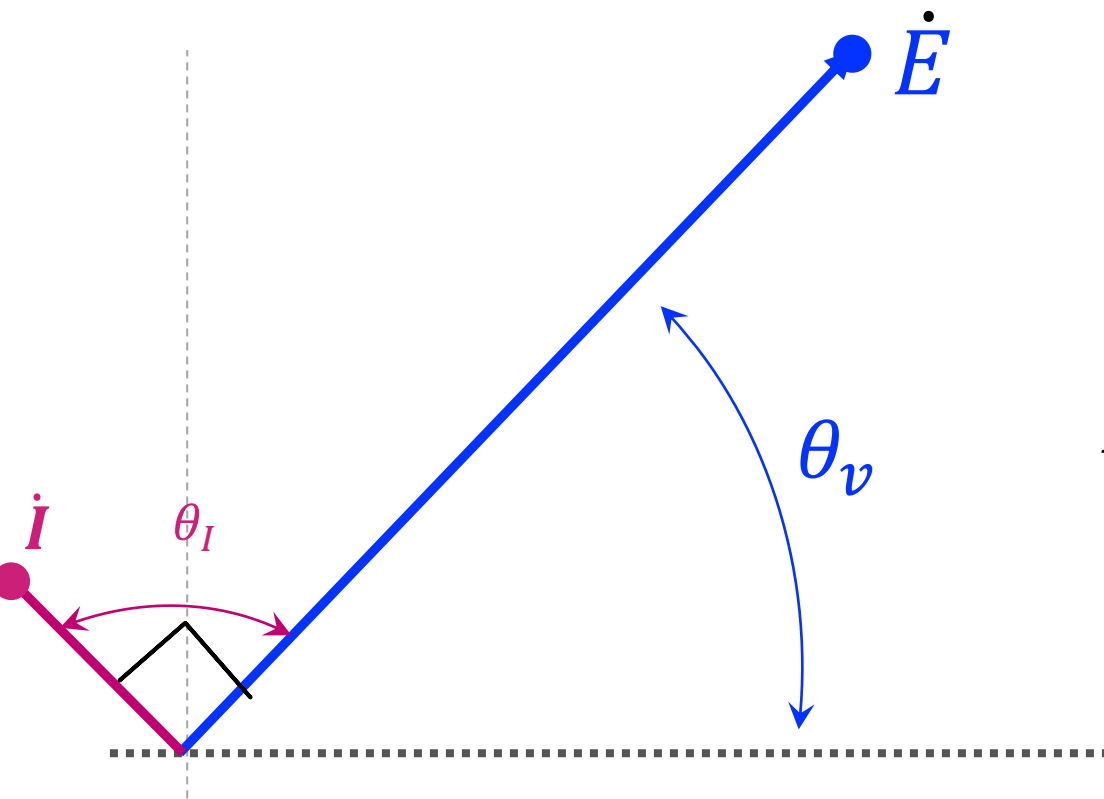
$$i = \frac{E_e}{j\omega L} e^{j(\omega t + \theta_v)}$$

$$i = \frac{\dot{E}}{j\omega L} \quad \dot{E} = j\omega L i$$

インダクタにおけるオーム法則

インダクタにおける電流と電圧の位相関係：

$$\dot{I} = \frac{E_e}{j\omega L} e^{j(\omega t + \theta_v)}$$

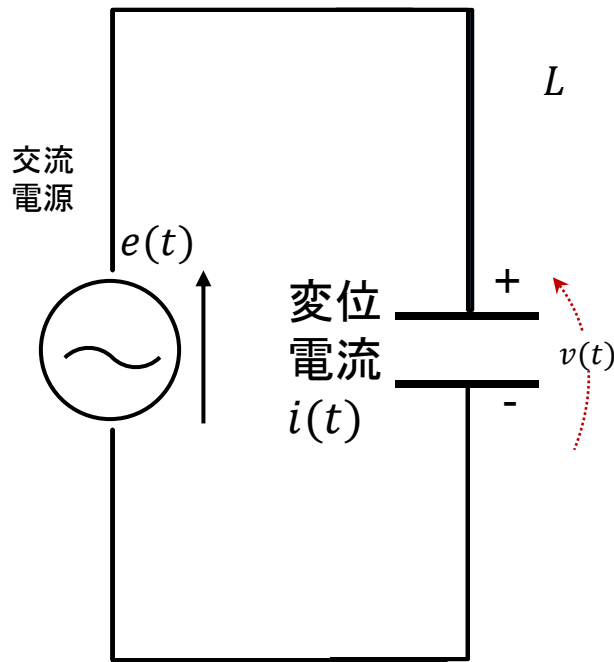


$$\dot{I} = \frac{E_e}{\omega L} e^{j\left(\omega t + \theta_v - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\dot{I} = \frac{E_e}{\omega L} \angle \left(\theta_v - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta_I + \frac{\pi}{2} = \theta_v$$

交流回路要素を複素数で表現：コンデンサ



瞬時値 $e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta_v)$

$$\dot{E} = E_e e^{j(\omega t + \theta_v)}$$

$$i = C \frac{d\dot{E}}{dt}$$

$$i = j\omega C E_e e^{j(\omega t + \theta_v)}$$

$$i = j\omega C \dot{E} \quad \dot{E} = \frac{1}{j\omega C} i$$

キャパシタにおけるオーム法則

コンデンサにおける電流と電圧の位相関係：

$$j = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

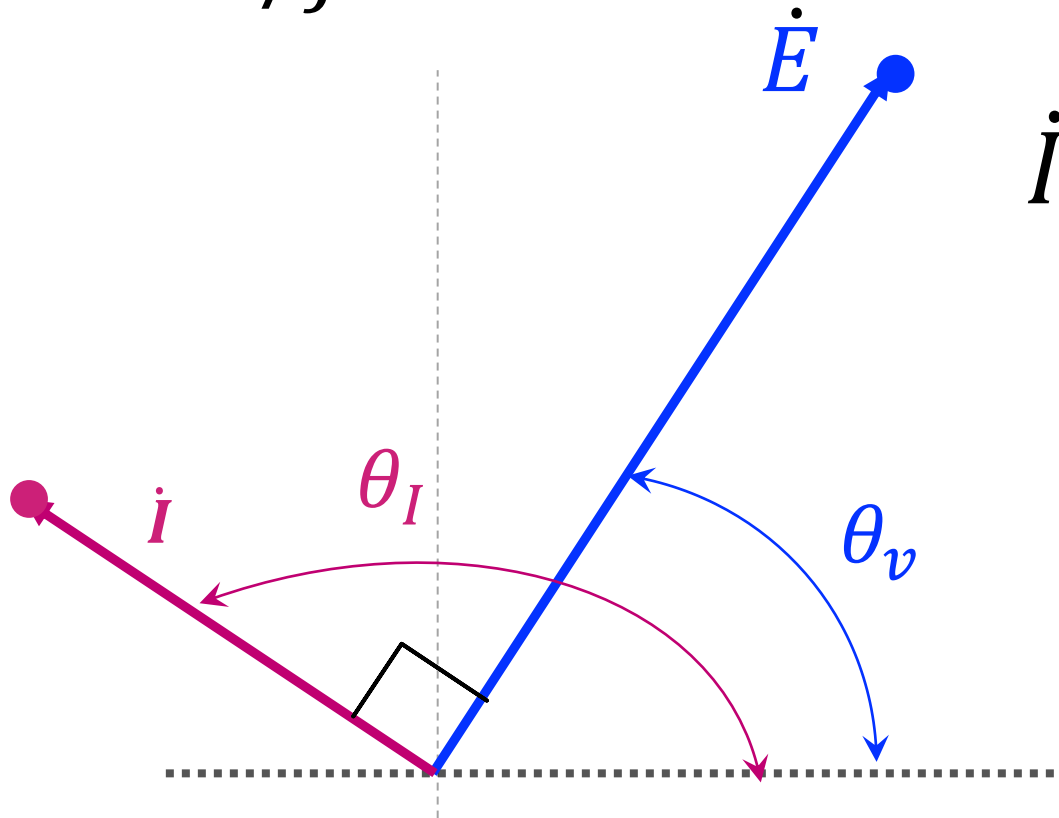
$$\dot{I} = \omega C E_e e^{j(\omega t + \theta_v)} e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\dot{I} = I_e e^{j\left(\omega t + \theta_v + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$I_e = \omega C E_e \quad \theta_I = \theta_v + \frac{\pi}{2}$$

コンデンサにおける電流と電圧の位相関係:

$$\dot{I} = \frac{E_e}{1/j\omega C} e^{j(\omega t + \theta_v)} = j\omega C E_e e^{j(\omega t + \theta_v)}$$



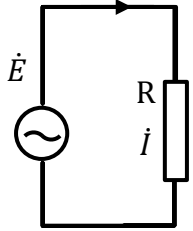
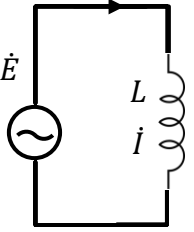
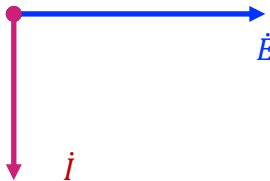
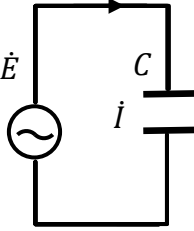
$$\dot{I} = I_e e^{j(\omega t + \theta_v + \frac{\pi}{2})}$$

$$\dot{I} = I_e \angle (\theta_v + \frac{\pi}{2})$$

$$\theta_I = \theta_v + \frac{\pi}{2}$$

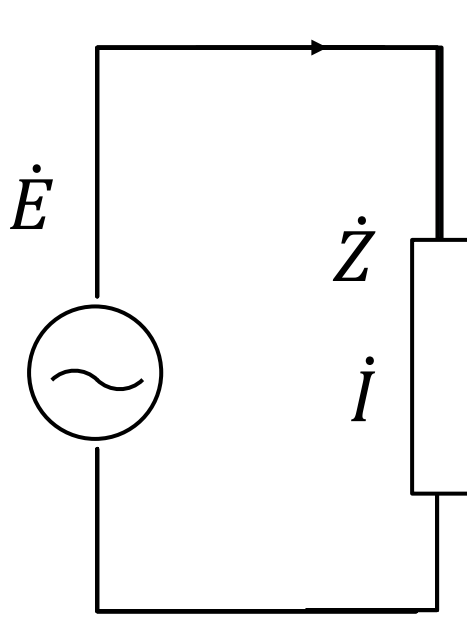
$$I_e = \omega C E_e$$

交流回路の回路要素の複素数表記:まとめ

素子	記号	フェーザ	量記号 (単位)	インピーダンス(Ω)	オーム の法則
抵抗			$R(\Omega)$	$R(\Omega)$	$\dot{E} = \dot{I}R$
インダクタ (コイル)			$L(\text{H})$	$j\omega L(\Omega)$	$\dot{E} = j\omega L \dot{I}$
キャパシタ (コンデンサ)			$C(\text{F})$	$\frac{1}{j\omega C} (\Omega)$	$\dot{E} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}$

インピーダンス $\dot{Z}$ と複素数オーム法則

インピーダンスとは、より一般的な意味における抵抗を意味している



抵抗のインピーダンス

$$\dot{Z} = R$$

コイルのインピーダンス

$$\dot{Z} = j\omega L$$

コンデンサのインピーダンス

$$\dot{Z} = \frac{1}{j\omega C} = j\left(-\frac{1}{\omega C}\right)$$

(複素数)オーム法則

$$\dot{E} = \dot{Z} \dot{i}$$

リアクタンス $X(\Omega)$ (Reactance)

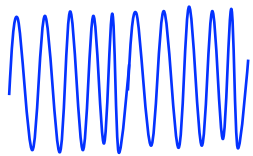
通常のオーム抵抗 R は各周波数に依存しないが、コイル L とコンデンサ C の“抵抗”は角周波数 ω (rad/s) に依存している。

X_L : 誘導性リアクタンス

$$X_L = \omega L$$

$$\dot{Z} = jX_L$$

高周波数

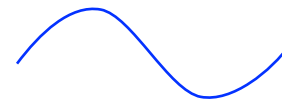


リアクタンス: 大

流れにくい

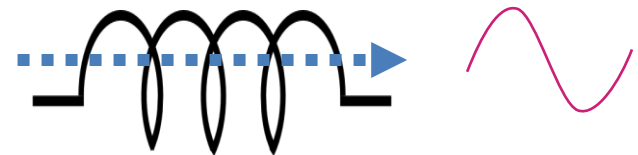


低周波数



リアクタンス: 小

流れやすい



リアクタンス $X(\Omega)$ (Reactance)

コンデンサ

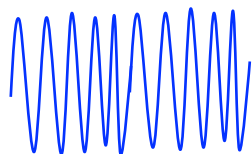
通常のオーム抵抗 R は各周波数に依存しないが、コイル L とコンデンサ C の“抵抗”は角周波数 ω (rad/s) に依存している。

X_C : 容量性リアクタンス

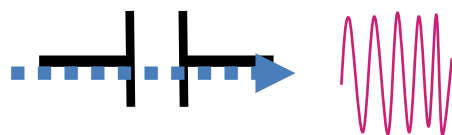
$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

$$\dot{Z} = j X_C$$

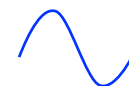
高周波数



リアクタンス: 小
流れやすい



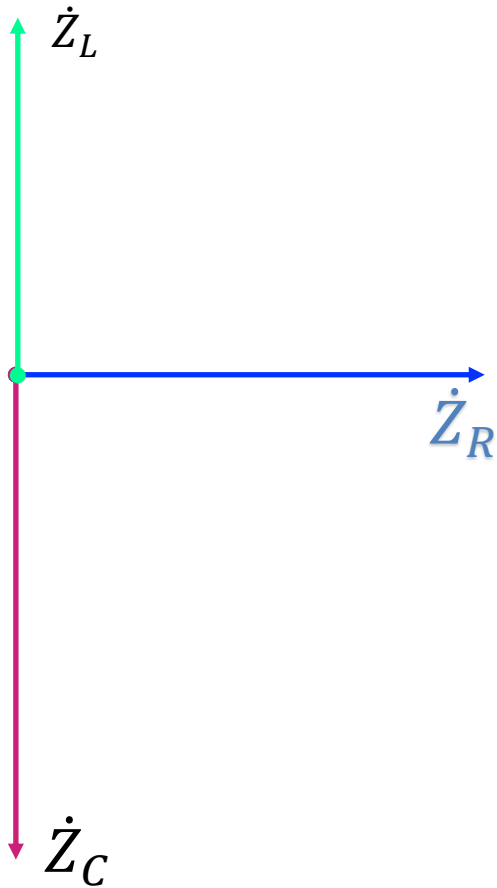
低周波数



リアクタンス: 大
流れにくい



インピーダンス $\dot{Z}$ の極座標表示



$$\dot{Z}_R = R * 1 = R e^{j0} = R \angle 0^\circ$$

$$\dot{Z}_L = jX_L = X_L e^{j\frac{\pi}{2}} = X_L \angle \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{Z}_C = jX_C = X_C e^{j(\frac{\pi}{2})} = -X_C \angle (-\frac{\pi}{2})$$

複素数インピーダンス $\dot{Z}$ の統一表現

$$\dot{Z}_R = R$$

$$\dot{Z}_R = R$$

$$\dot{Z}_L = j\omega L$$

$$\dot{Z}_L = jX_L$$

$$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

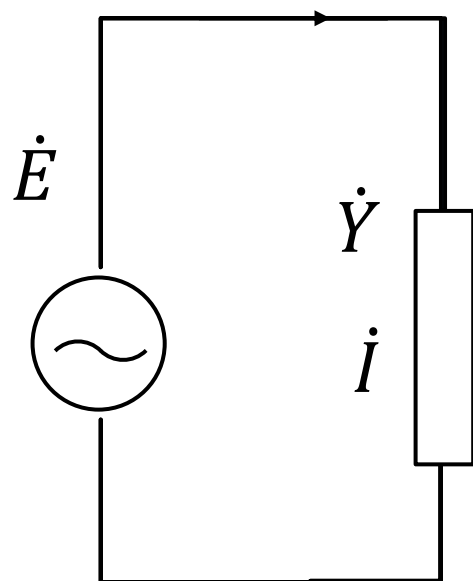
$$\dot{Z}_C = jX_C$$

$$\dot{Z} = R + jX$$

アドミタンス $\dot{Y}[\text{S}]$ と複素数オーム法則

インピーダンス $\dot{Z}$ の逆数はアドミタンスである。単位はS(ジーメンズ)

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}$$



抵抗のアドミタンス

$$\dot{Y} = \frac{1}{R}$$

コイルのアドミタンス

$$\dot{Y} = \frac{1}{j\omega L}$$

コンデンサのアドミタンス

$$\dot{Y} = j\omega C$$

(複素数)オーム法則

$$\dot{E} = \frac{1}{\dot{Y}} \dot{I}$$

サセプタンス B(S) (Susceptance)

通常のオーム抵抗Rは各周波数に依存しないが、コイルLとコンデンサCの“抵抗”は角周波数 ω (rad/s) に依存している。

コイル

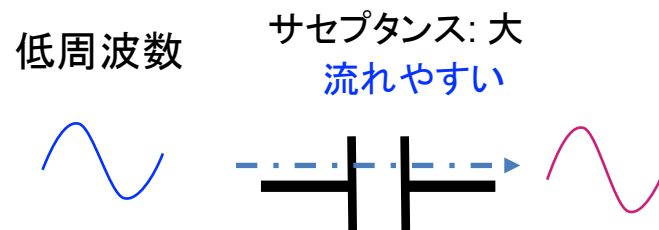
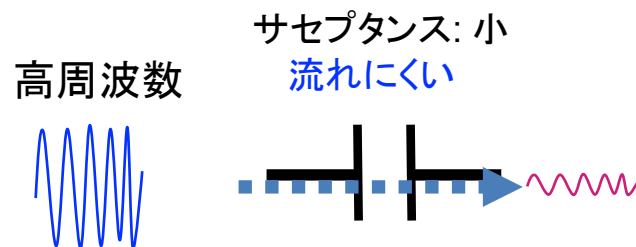
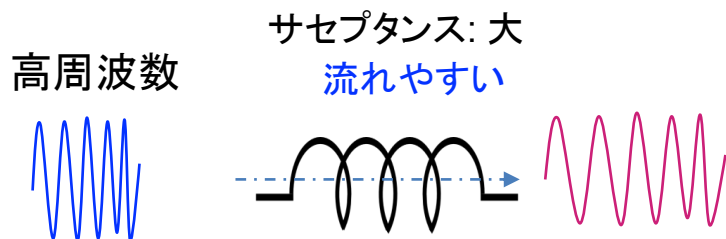
$$B_L = \frac{1}{\omega L}$$

B_L : 誘導性サセプタンス

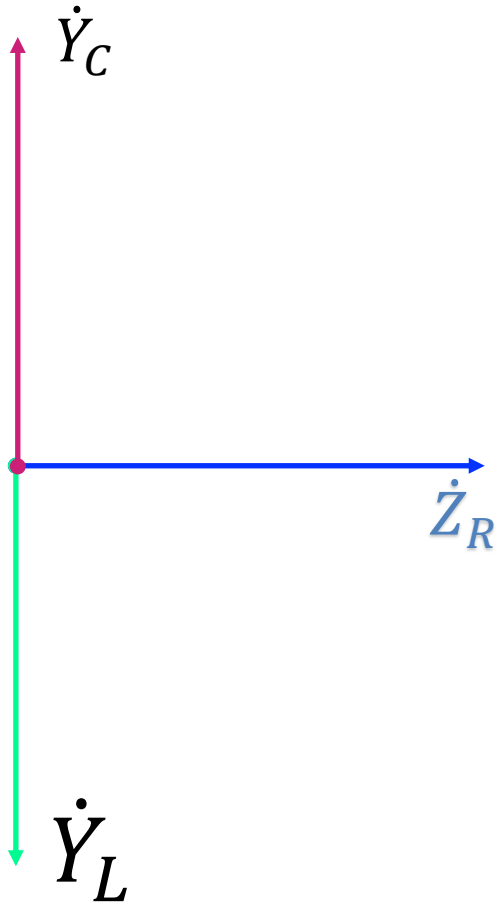
コンデンサ

$$B_C = \omega C$$

B_C : 容量性サセプタンス



アドミタンス $\dot{Y}$ の極座標表示

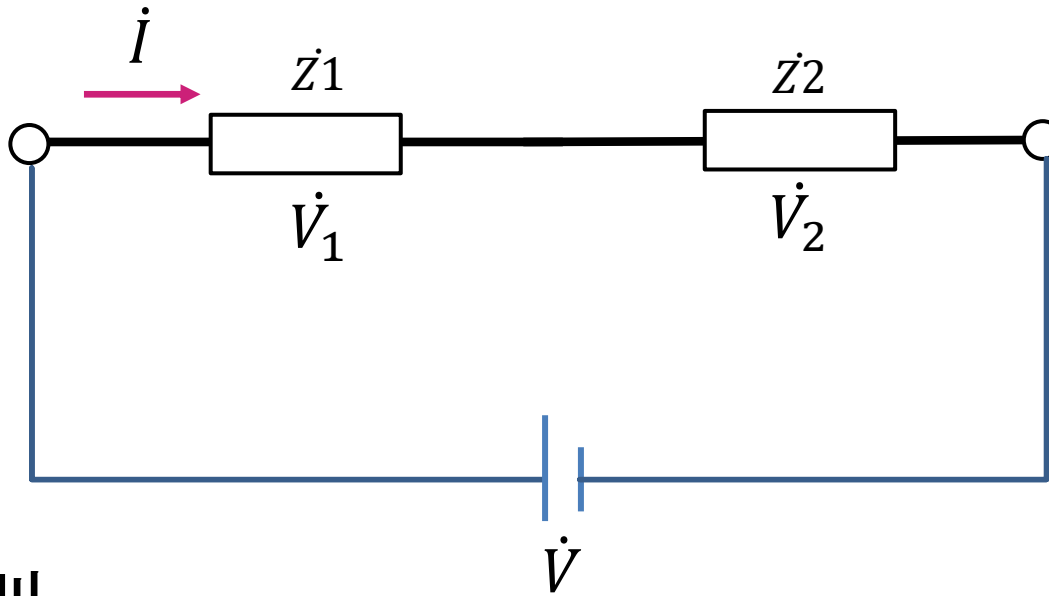


$$\dot{Y}_R = \frac{1}{R} = \frac{1}{R} e^{j0} = R \angle 0^\circ$$

$$\dot{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = B_L e^{j(-\frac{\pi}{2})} = B_L \angle (-\frac{\pi}{2})$$

$$\dot{Y}_C = jB_C = B_C e^{j(\frac{\pi}{2})} = B_C \angle (\frac{\pi}{2})$$

合成 インピーダンス $\dot{Z}$ (複素数)

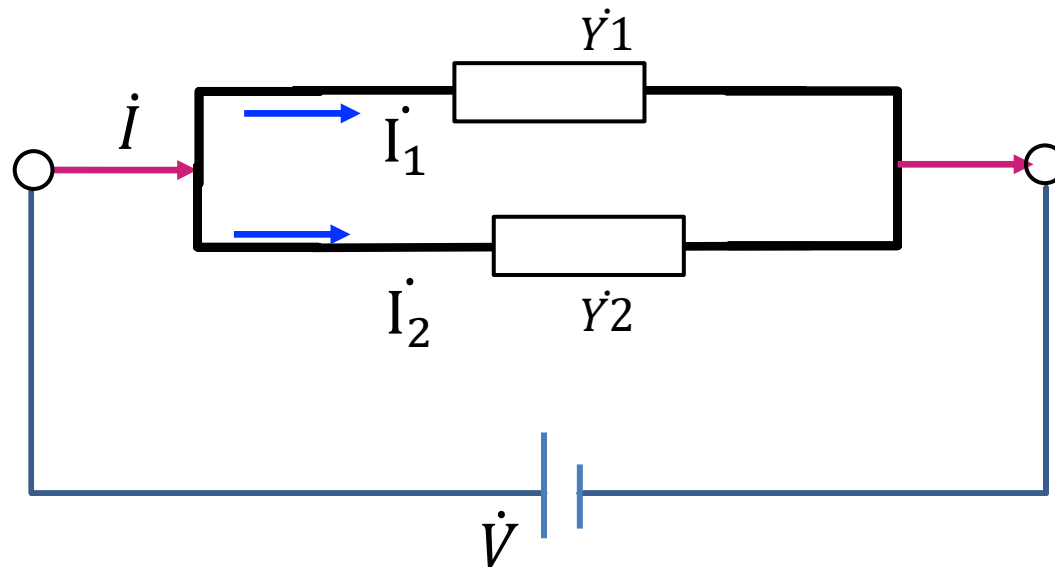


KVL法則:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \dot{Z}_1 \dot{I} + \dot{Z}_2 \dot{I} = (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) \dot{I}$$

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$$

合成アドミタンス $\dot{Y}$ (複素数)



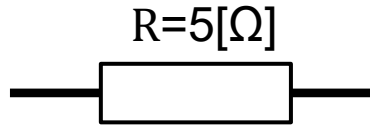
KCL法則:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{Y}_1 \dot{V} + \dot{Y}_2 \dot{V} = (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2) \dot{V}$$

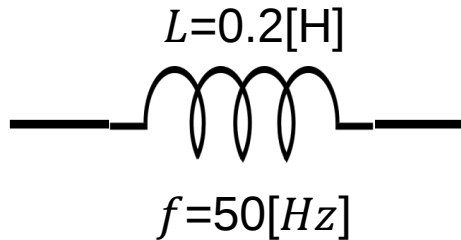
$$\dot{Y} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2$$

インピーダンス $\dot{Z}$ とオーム法則(複素数)の練習:

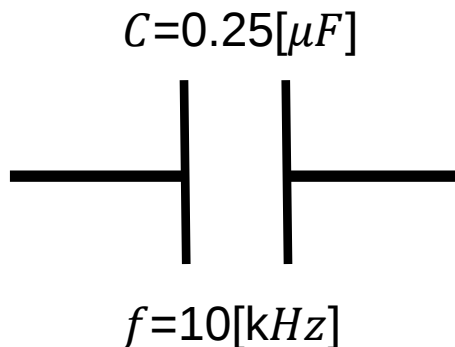
下記の回路のインピーダンス(複素数)を求めなさい! またこれらの回路のインピーダンスは誘導性また容量性のどちらであるかを答えなさい。



$$\dot{Z} =$$



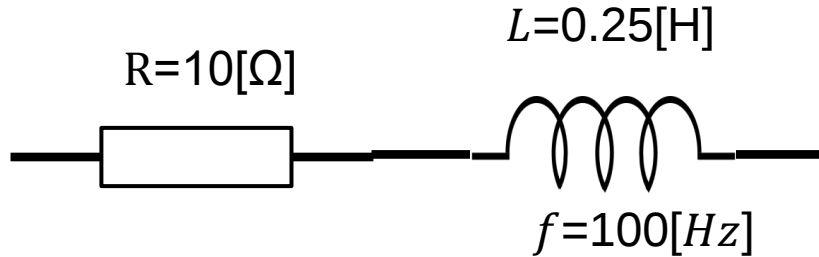
$$\dot{Z} = j * \omega L = j * 2\pi f * L$$



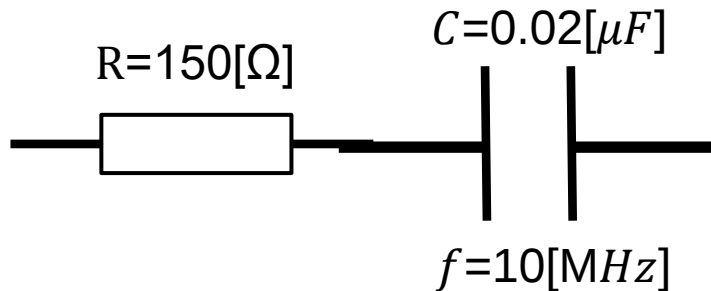
$$\dot{Z} = j * \frac{-1}{\omega C} = j * \frac{-1}{2\pi f C}$$

インピーダンス $\dot{Z}$ とオーム法則(複素数)の練習:

下記の回路のインピーダンス(複素数)を求めなさい! またこれらの回路のインピーダンスは誘導性また容量性のどちらであるかを答えなさい!

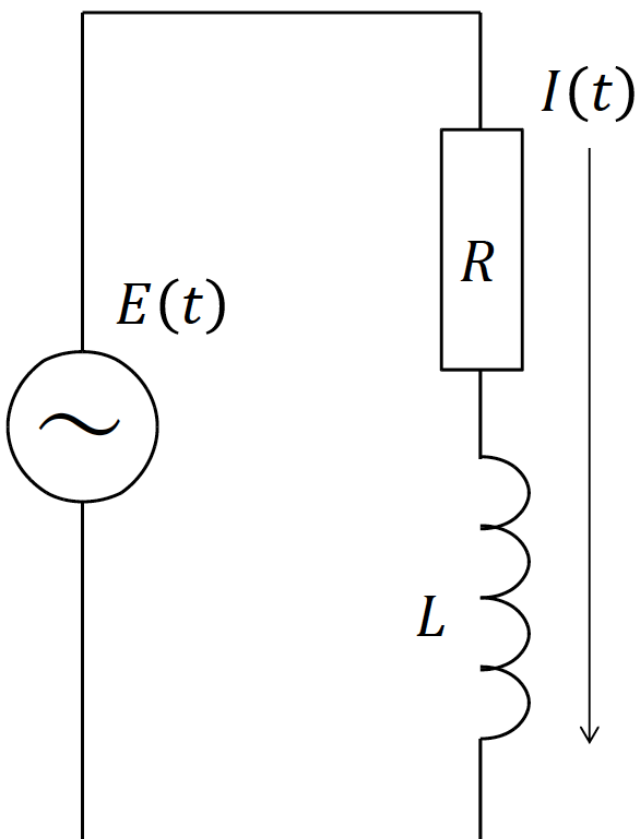


$$\dot{Z} = R + j * \omega L$$



$$\dot{Z} = R + j * \frac{-1}{\omega C}$$

R-L直列回路複素数解析



$$E(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$$

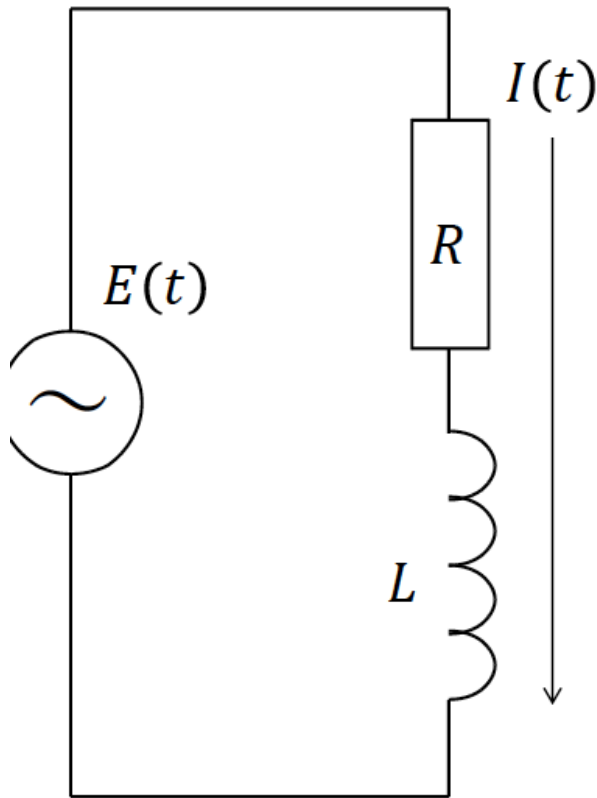
$$E(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\Rightarrow \dot{E}(t) = E_m \exp[j(\omega t + \varphi)]$$

$$\dot{Z} = R + j\omega L$$
$$= \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \exp(j\alpha)$$
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$\dot{I}(t) = \frac{\dot{E}(t)}{\dot{Z}}$$
$$= \frac{E_m \exp[j(\omega t + \varphi)]}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \exp(j\alpha)}$$
$$= \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \exp[j(\omega t + \varphi - \alpha)]$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi - \alpha)$$

R-L直列回路フェーザ位相解析

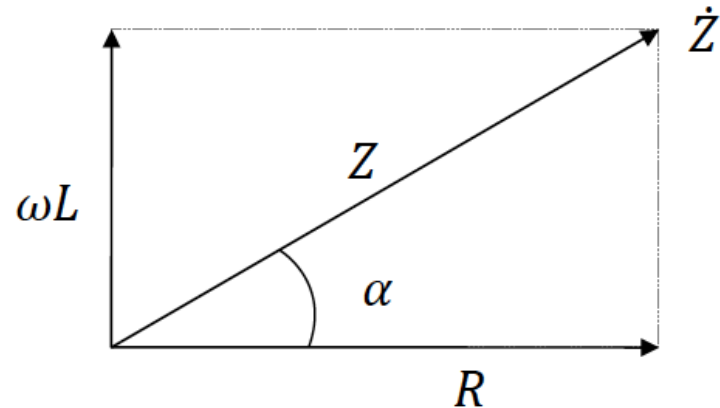


$$E(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \dot{E}(t) = E_m \exp[j(\omega t + \varphi)]$$

$$\dot{E} = E_e \angle \theta_v$$

$$\dot{Z} = R + j\omega L = Z \exp(j\alpha)$$

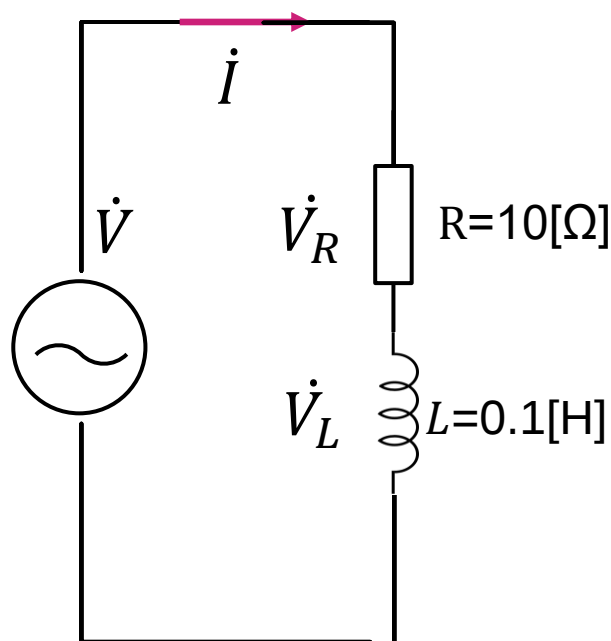


$$\dot{I}(t) = \frac{\dot{E}(t)}{\dot{Z}} = \frac{\dot{E}(t)}{Z e^{j\alpha}}$$

インピーダンス $\dot{Z}$ とオーム法則(複素数)の練習:

下記のR-L直列回路に電流 $\dot{I} = 1\angle 0^\circ [\text{A}]$ が流れている時の電圧 $\dot{V}_R$ 、 $\dot{V}_L$ 、 $\dot{V}$ のフェーザ表示とインピーダンス(複素数)を求めなさい。また、 $\dot{I}$ 、 $\dot{V}_R$ 、 $\dot{V}_L$ 、 $\dot{V}$ の関係についてフェーザ図を描きなさい。ただし、周波数 $f=50[\text{Hz}]$ とする。

最初に $\dot{V}_R$ 、 $\dot{V}_L$ 、 $\dot{E}$ のフェーザ表示とインピーダンス(複素数)を求めます。



$$\begin{aligned}\dot{V}_R &= R\dot{I} \\ &= 10 * 1\angle 0^\circ \\ &= 10 * 1e^{j*0} \\ &= 10e^{j*0} = 10\angle 0^\circ\end{aligned}$$

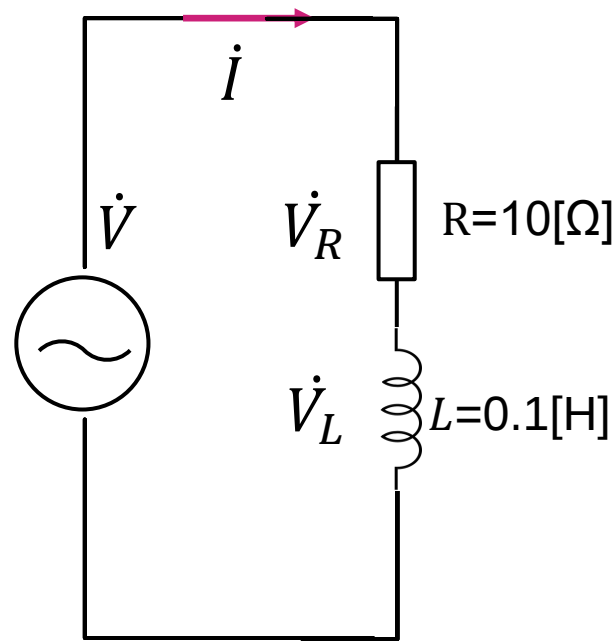
オイラーの公式を利用する:

$$\dot{V}_R = 10e^{j*0} = 10 + j * 0 [\text{V}]$$

インピーダンス $\dot{Z}$ とオーム法則(複素数)の練習:

下記のR-L直列回路に電流 $\dot{I} = 1\angle 0^\circ [\text{A}]$ が流れている時の電圧 $\dot{V}_R$ 、 $\dot{V}_L$ 、 $\dot{V}$ のフェーザ表示とインピーダンス(複素数)を求めなさい。また、 $\dot{I}$ 、 $\dot{V}_R$ 、 $\dot{V}_L$ 、 $\dot{V}$ の関係についてフェーザ図を描きなさい。ただし、周波数 $f=50[\text{Hz}]$ とする。

$\dot{V}_L$ フェーザ表示とインピーダンス(複素数)を求めます。



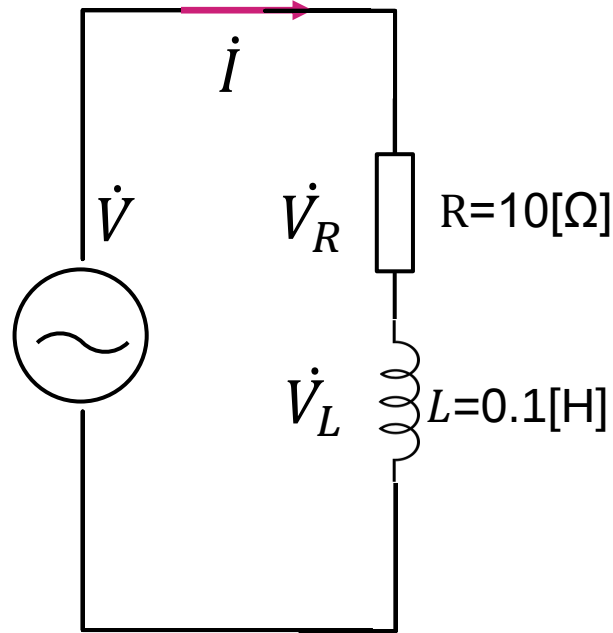
$$\begin{aligned}\dot{V}_L &= \dot{I} * j\omega L \\ &= 1e^{j*0} * 31.4e^{j*90^\circ} \\ &= 31.4\angle 90^\circ\end{aligned}$$

$$\dot{V}_L = 0 + j * 31.4[\text{V}]$$

インピーダンス $\dot{Z}$ とオーム法則(複素数)の練習:

下記のR-L直列回路に電流 $\dot{I} = 1\angle 0^\circ [\text{A}]$ が流れている時の電圧 $\dot{V}_R$ 、 $\dot{V}_L$ 、 $\dot{V}$ のフェーザ表示とインピーダンス(複素数)を求めなさい。また、 $\dot{I}$ 、 $\dot{V}_R$ 、 $\dot{V}_L$ 、 $\dot{V}$ の関係についてフェーザ図を描きなさい。ただし、周波数 $f=50[\text{Hz}]$ とする。

$\dot{E}$ のフェーザ表示とインピーダンス(複素数)を求めます。



$$\dot{V}_R = 10e^{j*0} = 10 + j * 0 [\text{V}]$$

$$\dot{V}_L = 0 + j * 31.4 [\text{V}]$$

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L = 10 + j * 31.4 [\text{V}]$$

$$\dot{V} = \sqrt{10^2 + 31.4^2} \angle \tan^{-1} \frac{31.4}{10}$$

$$\dot{V} = 33 \angle 72.3^\circ$$

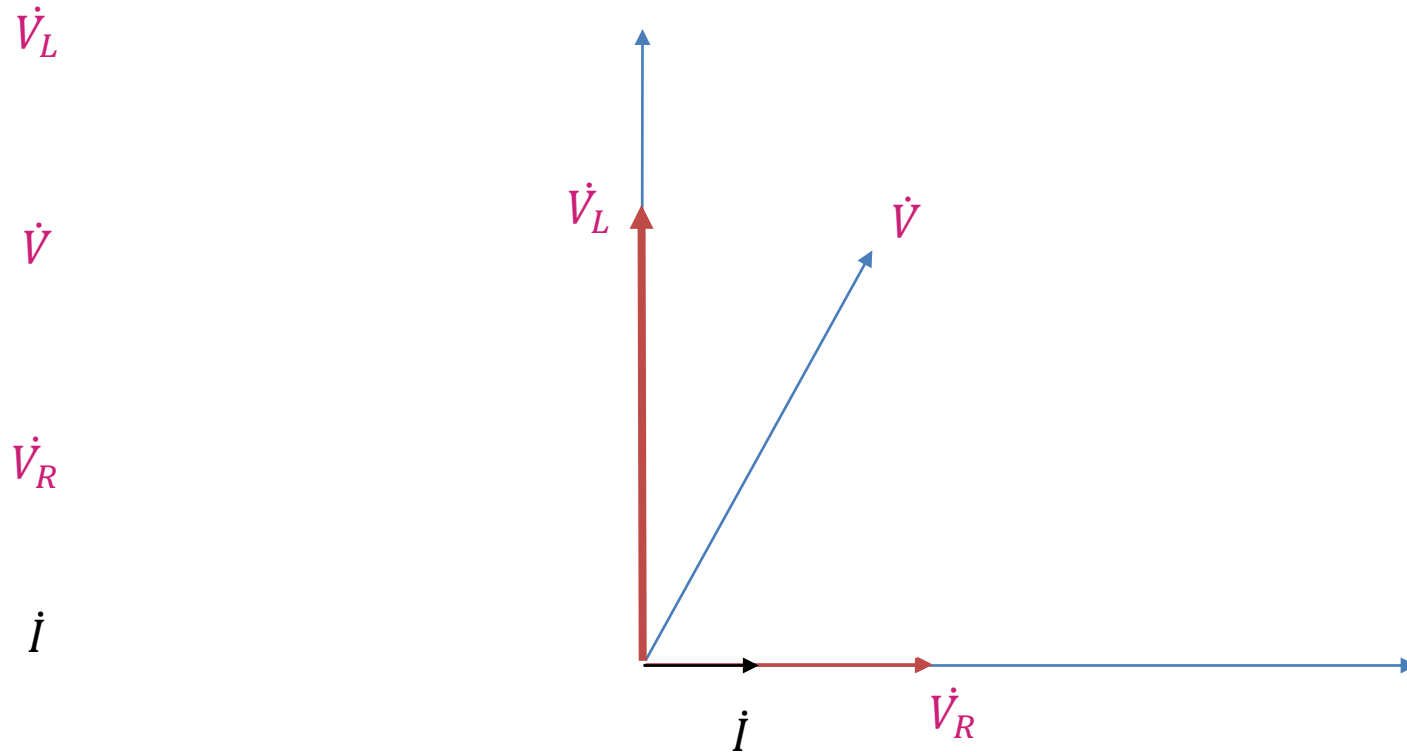
$\dot{I}$ 、 $\dot{V}_R$ 、 $\dot{V}_L$ 、 $\dot{V}$ の関係についてフェーザ図を描きなさい

$$\dot{I} = 1\angle 0^\circ [\text{A}]$$

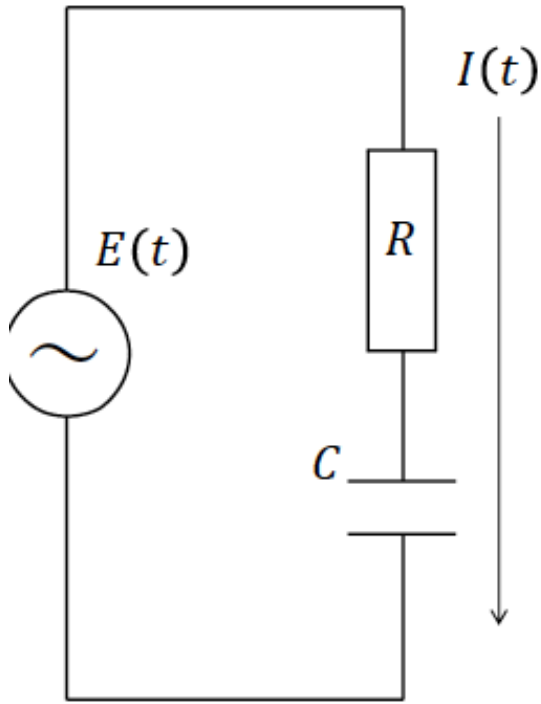
$$\dot{V}_L = 31.4\angle 90^\circ$$

$$\dot{V}_R = 10\angle 0^\circ$$

$$\dot{V} = 33\angle 72.3^\circ$$



R-C直列回路の複素数解析:



$$\dot{Z} = R - j/\omega C$$

$$= \sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2} \exp(-j\alpha)$$

$$\dot{i}(t) = \frac{\dot{E}(t)}{\dot{Z}}$$

$$= \frac{E_m \exp[j(\omega t + \varphi)]}{\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2} \exp(-j\alpha)}$$

$$= \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}} \exp[j(\omega t + \varphi + \alpha)]$$

$$E(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$$

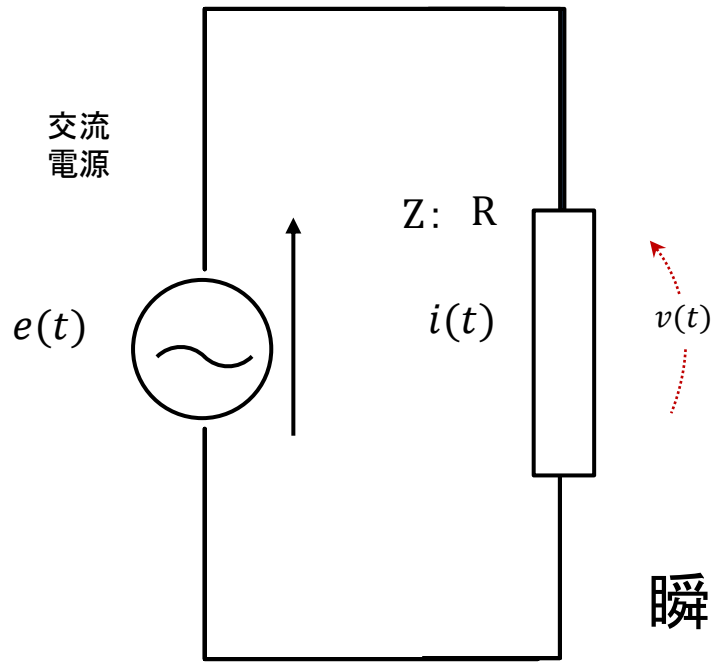
$$\Rightarrow \dot{E}(t) = E_m \exp[j(\omega t + \varphi)]$$

電力と力率

$$\begin{array}{c} \text{電気料金} \end{array} = \begin{array}{c} \text{基本料金} \\ \text{基本料金単価} \times \text{契約電力} \times \text{力率割引・割増し} \end{array} + \begin{array}{c} \text{電力量料金} \\ \text{電力量料金単価} \times \text{ご使用電力量} \pm \text{燃料費調整額} \end{array} + \begin{array}{c} \text{再生可能エネルギー} \\ \text{発電促進賦課金} \\ \text{再生可能エネルギー} \\ \text{発電促進賦課金単価} \times \text{ご使用電力量} \end{array}$$



正弦波交流電力の計算：インピダンスは抵抗のみ



$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{E_m}{R} \quad \text{瞬時値}$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)$$

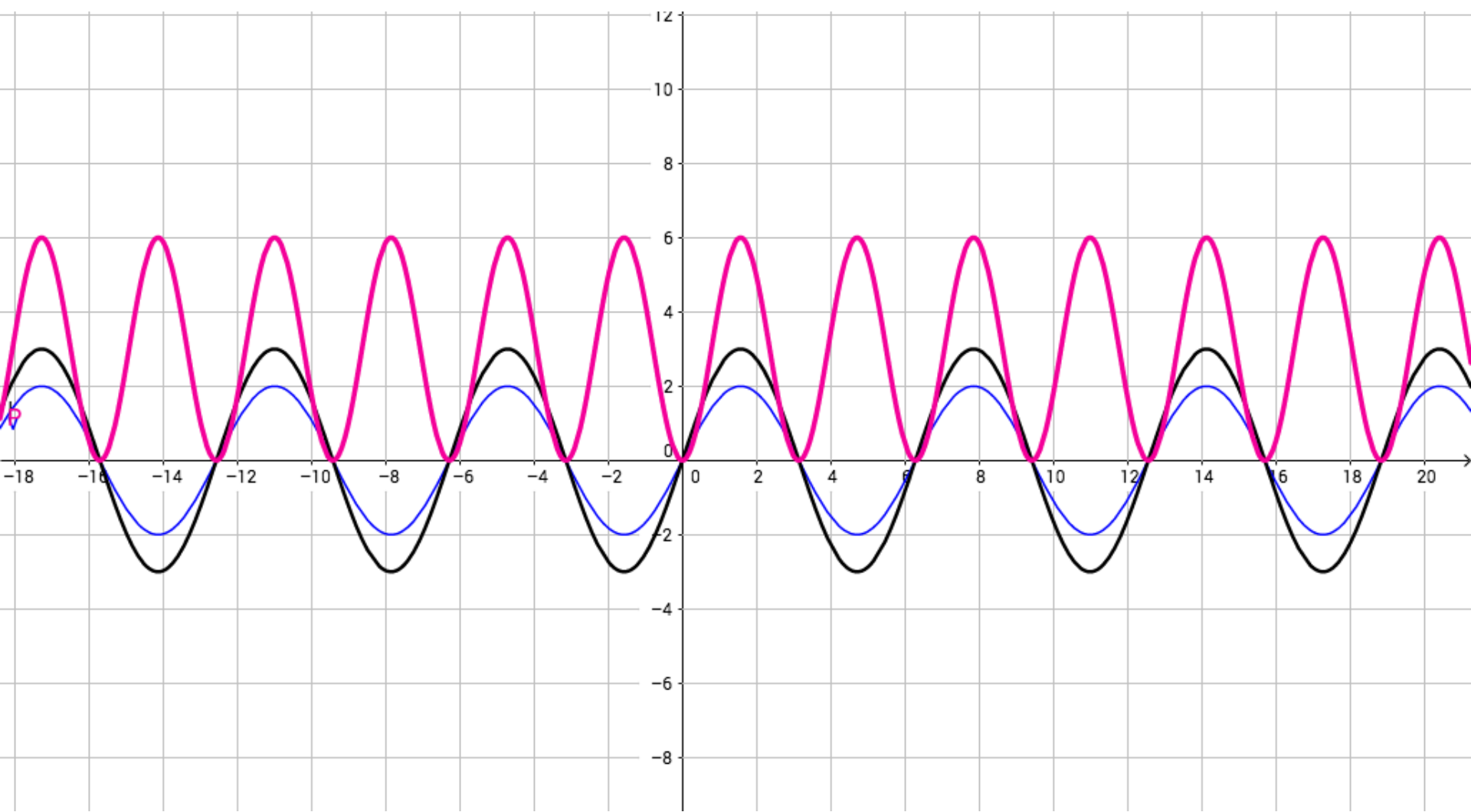
$$\text{瞬時電力 } P(t) = E_m I_m \sin^2(\omega t + \theta)$$

$$\text{平均電力 } P_a = \int_0^T P(t) dt$$

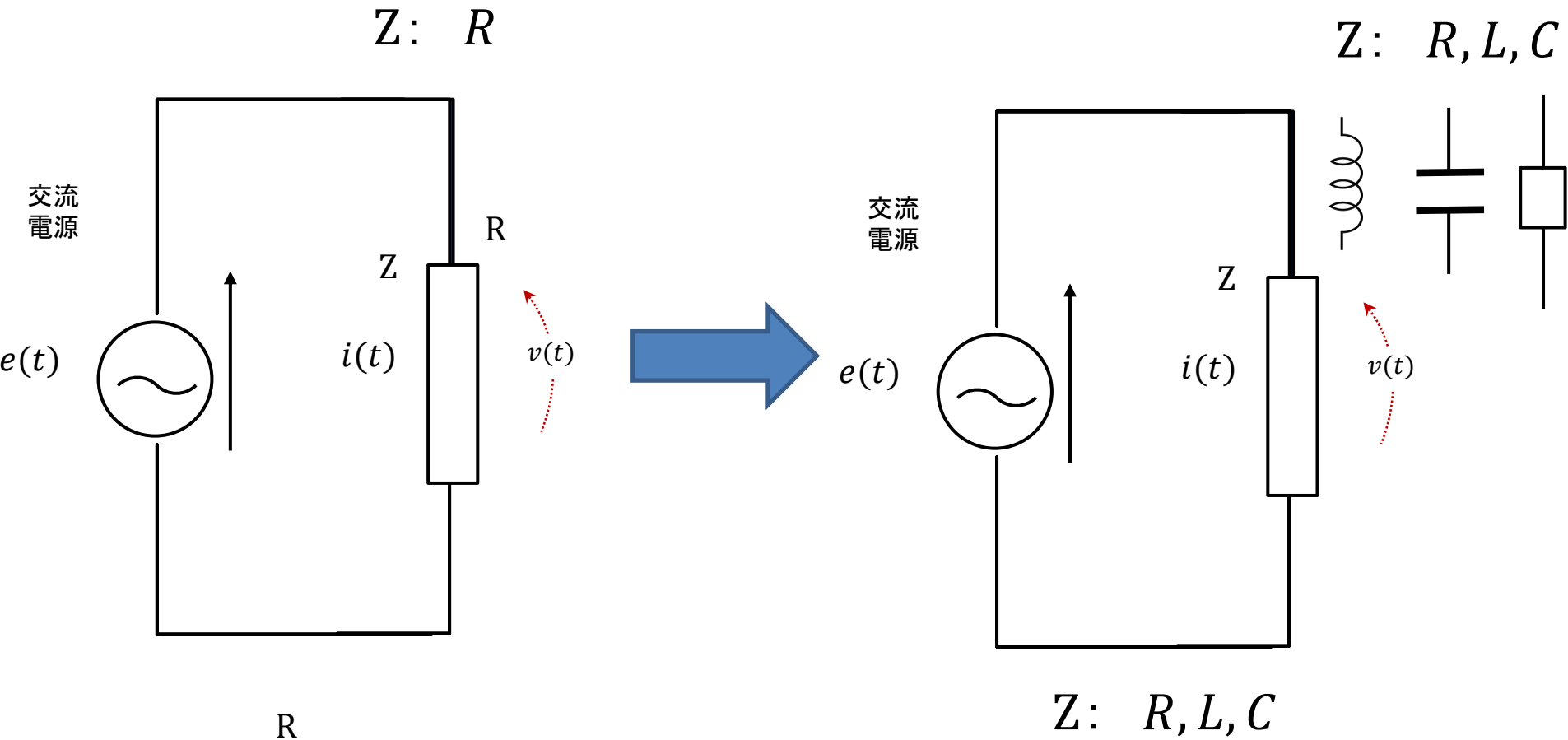
$$P_a = \frac{1}{2} E_m I_m = \frac{\sqrt{2}}{2} I_m \frac{\sqrt{2}}{2} E_m = I_e E_e$$

電流の実効値

電圧の実効値



正弦波交流電力の計算: L, C まで拡張する



位相の遅れと進みがない
電流電圧が同一位相

位相の遅れと進みが生じる
電流電圧の位相が異なる！

正弦波交流電力の計算: R, L, C まで拡張する

$$v(t) = \sqrt{2} V_E \sin(\omega t + \theta_v)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I_E \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$p(t) = v(t) * i(t)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$p(t) = V_E I_E \{ \cos(\theta_I - \theta_v) - \cos(2\omega t + \theta_I + \theta_v) \}$$

$$p(t) = V_E I_E \{ \cos(\theta_v - \theta_I) - \cos(2\omega t + \theta_I + \theta_v) \}$$

正弦波交流電力の計算:

$\theta = \theta_I = \theta_v$ 抵抗のみの場合

$$p(t) = 2V_e I_e \sin^2(\omega t + \theta)$$

$$p(t) = 2V_e I_e \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t + 2\theta))$$

$$p(t) = V_e I_e \{ 1 - \cos(2\omega t + \theta_I + \theta_v) \}$$

$\theta_I \neq \theta_v$ 抵抗、コイルとコンデンサがある場合

$$p(t) = V_e I_e \{ \cos(\theta_I - \theta_v) - \cos(2\omega t + \theta_I + \theta_v) \}$$

正弦波交流電力： 有効電力 $\Leftrightarrow$ 抵抗

$\theta = \theta_I = \theta_v$ 抵抗のみの場合

$$p(t) = 2V_e I_e \sin^2(\omega t + \theta)$$

$$p(t) = V_e I_e \{ 1 - \cos(2\omega t + \theta_I + \theta_v) \}$$

$$P = \int_0^T P(t) dt$$

$$P = V_e I_e$$

正弦波交流電力： 有効電力 $\Leftrightarrow$ 抵抗、コンデンサ、コイル

$\theta_I \neq \theta_v$ 抵抗、コイルとコンデンサがある場合

$$p(t) = V_e I_e \{ \cos(\theta_I - \theta_v) - \cos(2\omega t + \theta_I + \theta_v) \}$$

$$P = \int_0^T P(t) dt$$

$$P = V_e I_e \cos(\theta_I - \theta_v) \quad \text{有効電力}$$

有効電力 P と力率

$$P = V_e I_e \cos(\theta_I - \theta_v) \quad P = V_e I_e$$

位相角: $\theta = \theta_I - \theta_v$

$$P = V_e I_e \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{P}{V_e I_e}$$

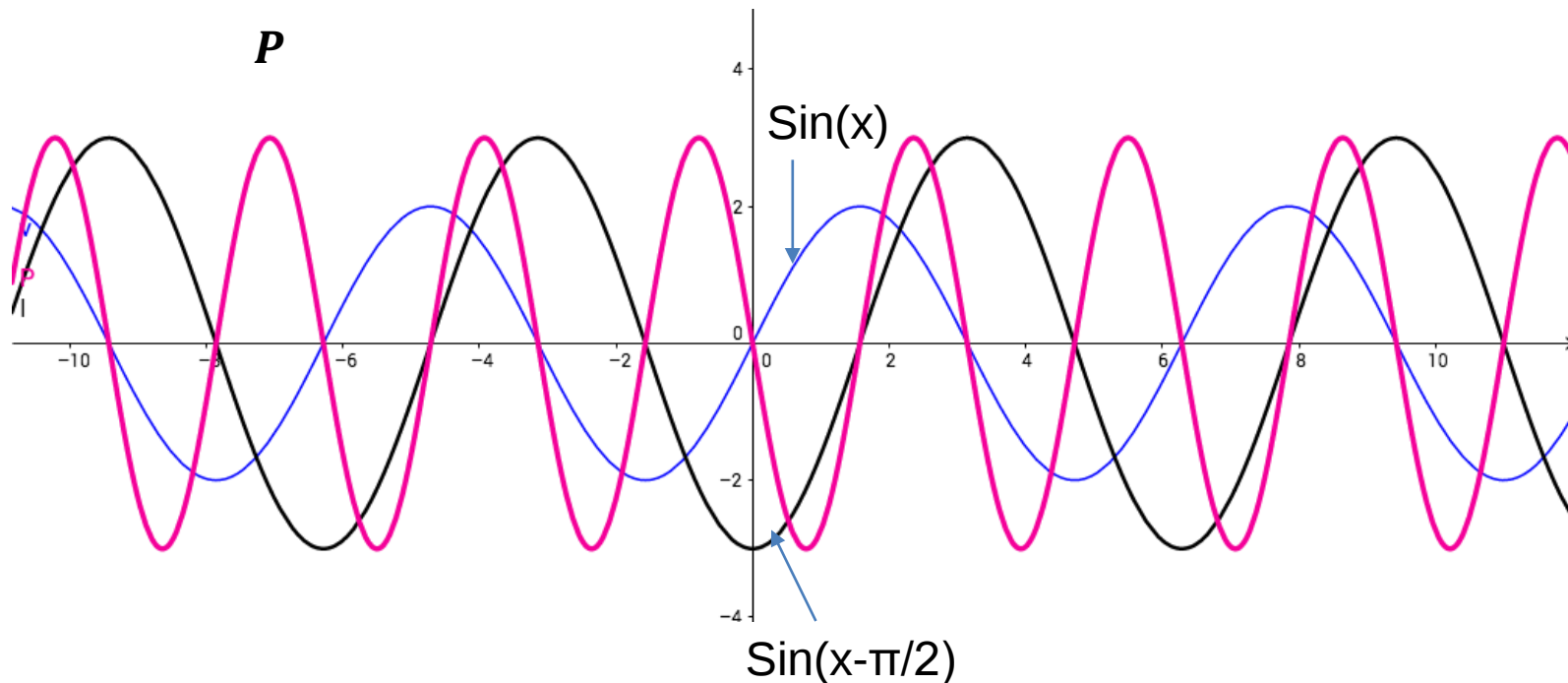
$\cos(\theta)$: 力率

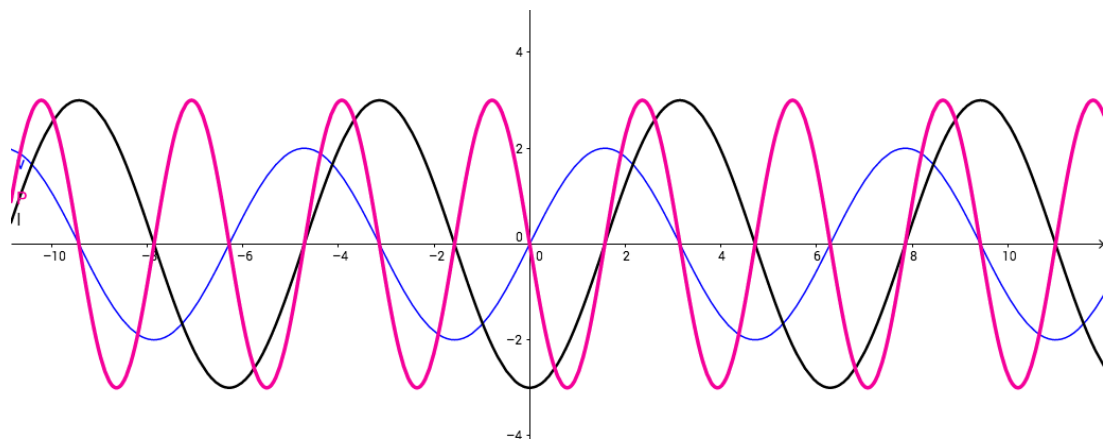
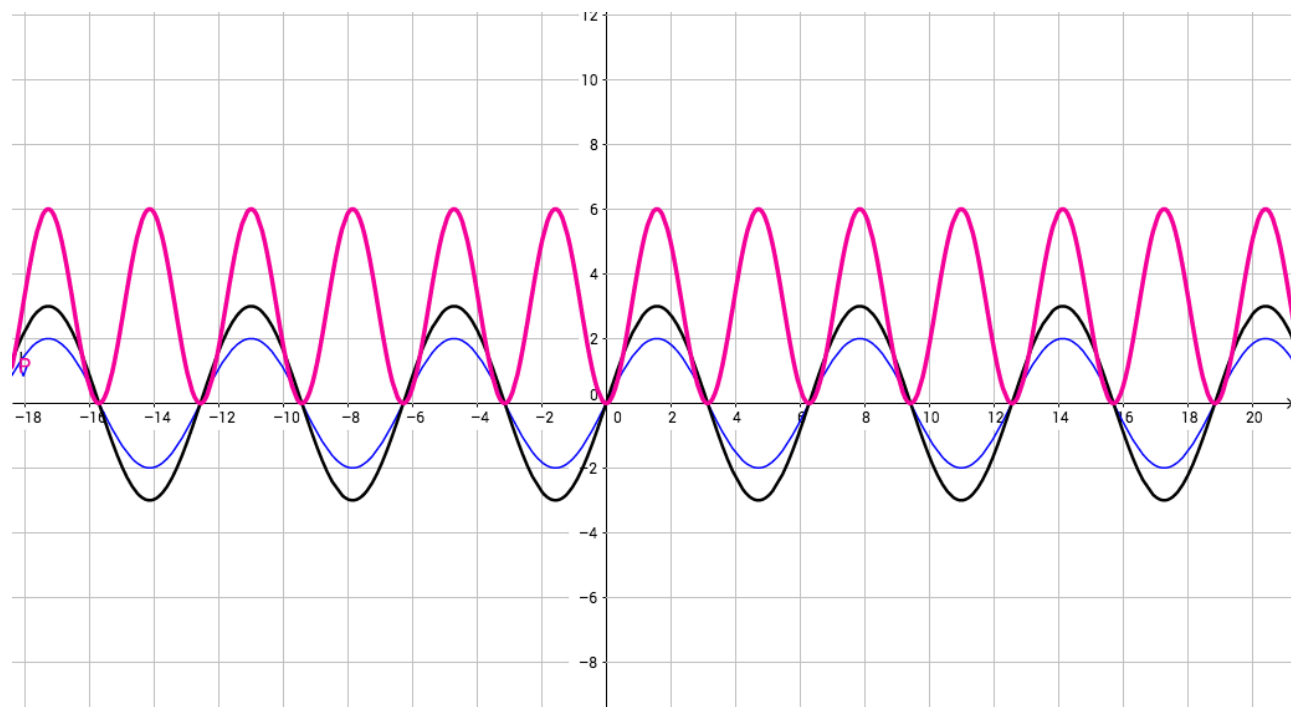
有効電力 P と力率

コンデンサ: $\cos(\theta) = \cos(-90) = 0$

コイル: $\cos(\theta) = \cos(90) = 0$

$$P = V_e I_e \cos(\theta) = 0$$





各回路素子単体における有効電力 P

$$P = V_e I_e \cos(\theta)$$

抵抗: $\cos(\theta) = \cos(0) = 1$ $P = V_e I_e$

コイル: $\cos(\theta) = \cos(90) = 0$ $P = 0$

コンデンサ: $\cos(\theta) = \cos(-90) = 0$ $P = 0$