基礎電気回路CH-6

交流複素数とフェーザ

$$v(t) = 100\sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

静止位相

$$v(t) = \sqrt{2}\ \frac{100}{\sqrt{2}}\ \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

実効値

$j\omega t$を使ってフェーザを表示することを回転フェーザと呼ぶ（教科書P56)

$$\dot{V}(t) = \sqrt{2}\ 10\ e^{j(\omega t + \frac{\pi}{3})}$$

フェーザ位相解析

実効値を使用

位相を使用

（静止）

$j\omega t$を除く

実効値を使用

位相を使用

$$\dot{V} = 10\angle\frac{\pi}{3}$$

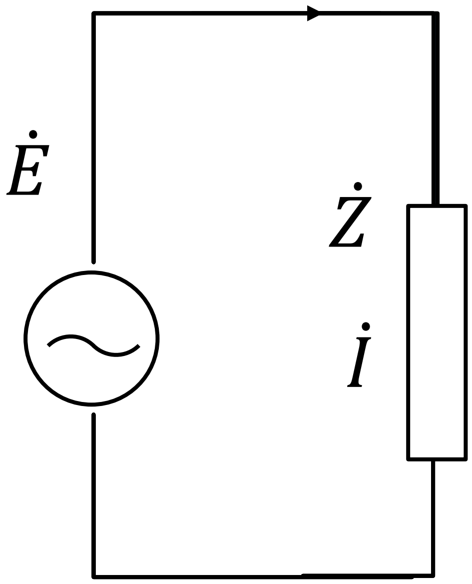
極座標フェーザ表示

$$\dot{V} = 10\ e^{j\frac{\pi}{3}}$$

指数フェーザ表示（静止）

インピーダンス $\dot{Z}$ と複素数オーム法則

インピーダンスとは、より一般的な意味における抵抗を意味している



抵抗のインピダンス

$$\dot{Z} = R$$

コイルのインピダンス

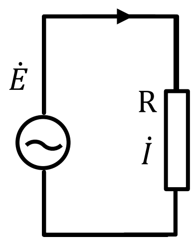
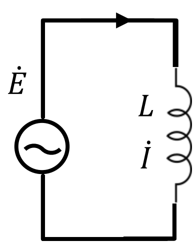
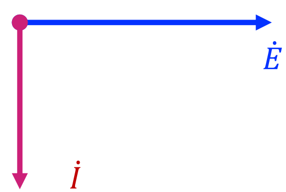
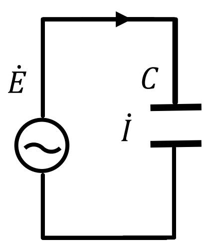
$$\dot{Z} = j\omega L$$

コンデンサのインピダンス

$$\dot{Z} = \frac{1}{j\omega C} = j(-\frac{1}{\omega C})$$

(複素数)オーム法則　　$\dot{E} = \dot{Z}\,\dot{I}$

交流回路における回路要素の複素数表記：まとめ

素子	記号	フェーザ	量記号（単位）	インピーダンス（Ω）	オームの法則
抵抗			R(Ω)	R(Ω)	$\dot{E} = \dot{I}R$
インダクタ（コイル）			L(H)	$j\omega L$(Ω)	$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{j\omega L}\ \dot{\boldsymbol{I}}$
キャパシタ（コンデンサ）			C(F)	$\frac{1}{j\omega C}$ (Ω)	$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{j\omega C}}\dot{\boldsymbol{I}}$

リアクタンス X（Ω） (Reactance)

通常のオーム抵抗Rは各周波数に依存しないが、コイルLとコンデンサのインピーダンスは角周波数ω (rad/s)に依存している。

コイル $\dot{Z} = j\omega L$

コンデンサ $\frac{1}{j\omega C}$

$X_L = \omega L \quad \dot{Z} = jX_L$

$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad \dot{Z} = j\,X_C$

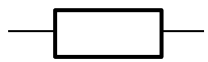
X_L：誘導性リアクタンス

X_C：容量性リアクタンス

リアクタンス X(Ω)を使った複素数インピーダンス $\dot{Z}$の統一表現

$$\dot{Z} = R + j\,X$$

$\dot{Z}_R = R$

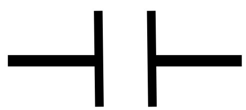


$\dot{Z}_R = R + j \ * 0$

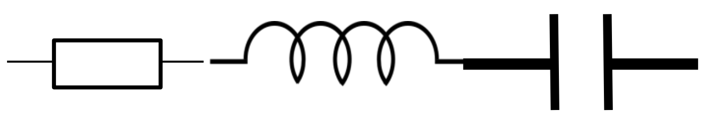
$\dot{Z}_L = j\omega L$

$\dot{Z}_L = 0 + jX_L$ $\quad X_L > 0$

$\dot{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C}$



$\dot{Z}_C = 0 + j\,X_C$ $\quad X_C < 0$

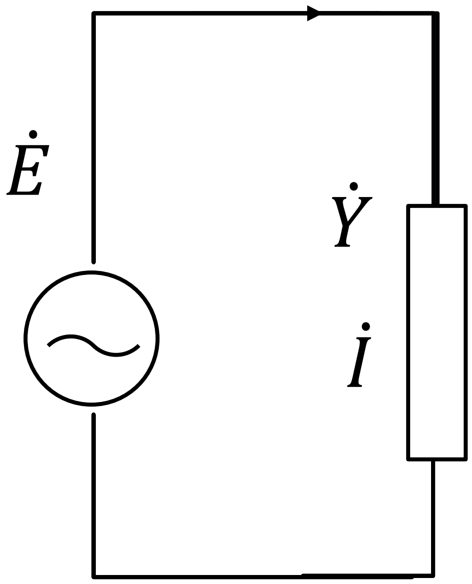


$$\dot{Z} = R + jX_L + j\,X_C = R + j\,X$$

アドミタンス $\dot{Y}$[S] と複素数オーム法則

インピーダンス$\dot{Z}$の逆数はアドミタンスである。単位はS（ジーメンス）

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}$$



抵抗のアドミタンス $$\dot{Y} = \frac{1}{R}$$

コイルのアドミタンス $$\dot{Y} = \frac{1}{j\omega L}$$

コンデンサのアドミタンス $$\dot{Y} = j\omega C$$

(複素数)オーム法則 $$\dot{E} = \frac{1}{\dot{Y}}\dot{I}$$

サセプタンス B（S） (Reactance)

通常のオーム抵抗Rは各周波数に依存しないが、
コイルLとコンデンサCの“抵抗”は角周波数ω
(rad/s) に依存している。

コイル

$$\dot{Y} = \frac{1}{j\omega L} = jB_L$$

$$B_L = -\frac{1}{\omega L}$$

B_L : 誘導性サセプタンス

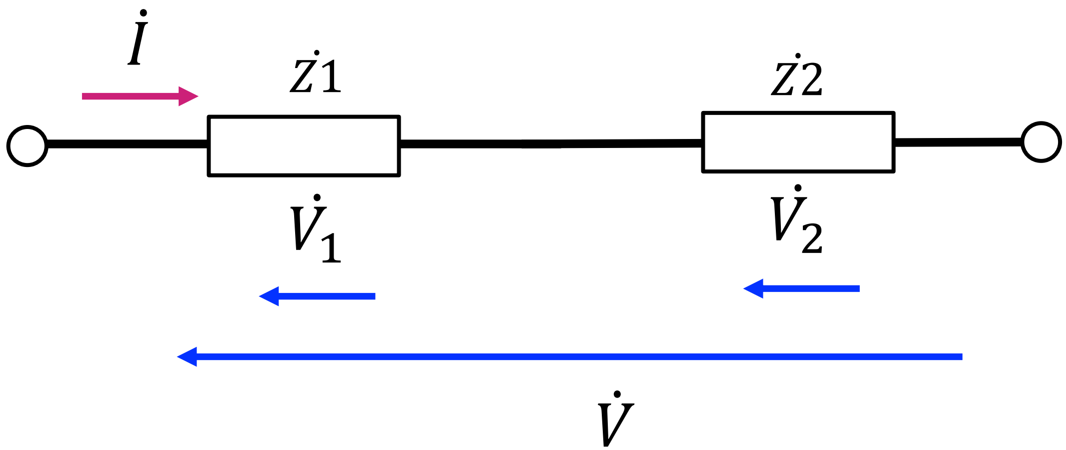
コンデンサ

$$\dot{Y} = j\omega C = jB_C$$

$$B_C = \omega C$$

B_C : 容量性サセプタンス

合成 インピーダンス $\dot{Z}$(複素数)

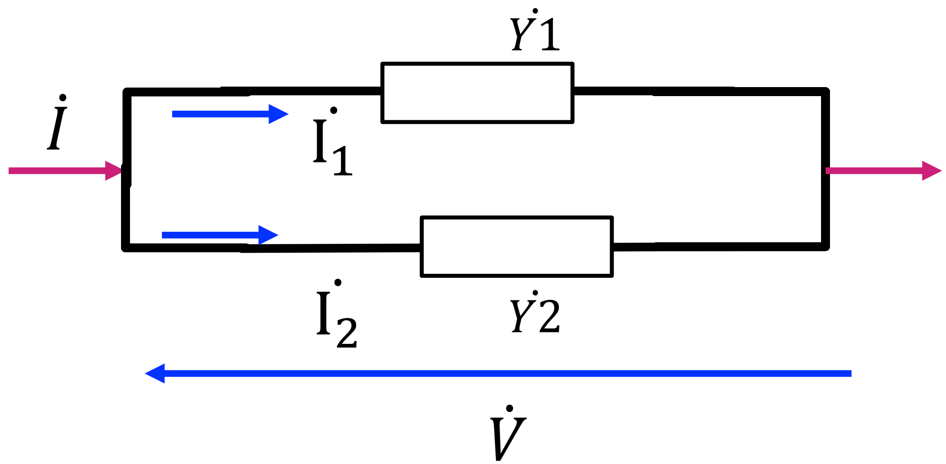


KVL法則:

$$\dot{V} = \dot{V_1} + \dot{V_2} = \dot{Z1}\,\dot{I} + \dot{Z2}\,\dot{I} = (\dot{Z1} + \dot{Z2})\,\dot{I}$$

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \dot{Z1} + \dot{Z2}$$

合成 アドミタンス $\dot{Y}$(複素数)



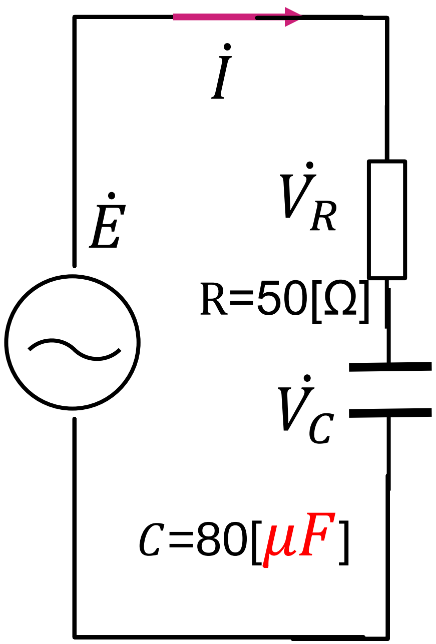
KCL法則:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{Y1}\,\dot{V} + \dot{Y2}\,\dot{V} = (\dot{Y1} + \dot{Y2})\,\dot{V}$$

$$\dot{Y} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \dot{Y1} + \dot{Y2}$$

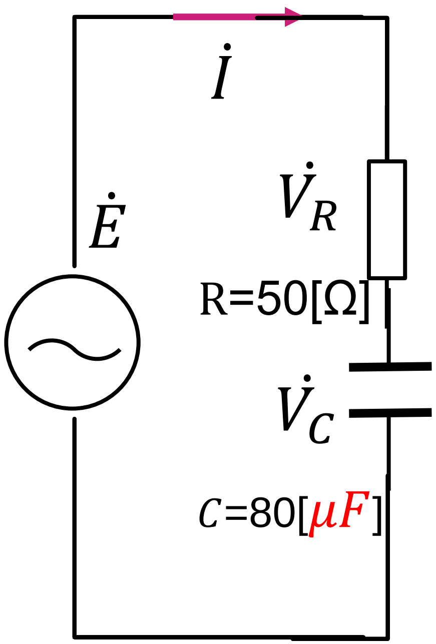
インピーダンス $\dot{Z}$ とオーム法則の練習：　R-C直列回路

下記のR-C直列回路に電流　$\dot{I} = 1\angle 0^o$[A]が流れている時の電圧　$\dot{V}_R$　、$\dot{V}_L$、$\dot{E}$のフェーザ表示とインピーダンス（複素数）を求めなさい。また、$\dot{I}$、$\dot{V}_R$　、$\dot{V}_L$、$\dot{E}$の関係についてフェーザ図を描きなさい。ただし、周波数f=50[Hz]とする。



インピーダンス $\dot{Z}$ とオーム法則の練習： R-C直列回路

下記のR-C直列回路に電流　$\dot{I} = 1\angle 0^o$[A]が流れている時の電圧　$\dot{V}_R$　、$\dot{V}_L$、$\dot{E}$のフェーザ表示とインピーダンス（複素数）を求めなさい。また、$\dot{I}$、$\dot{V}_R$　、$\dot{V}_L$、$\dot{E}$の関係についてフェーザ図を描きなさい。ただし、周波数f=50[Hz]とする。



$$\dot{I} = 1\angle 0^o \Leftrightarrow 1e^{j*0}$$

$$\dot{V}_R = \mathrm{R}\,\dot{I} = 50 * 1e^{j*0} = 50\angle 0^o$$

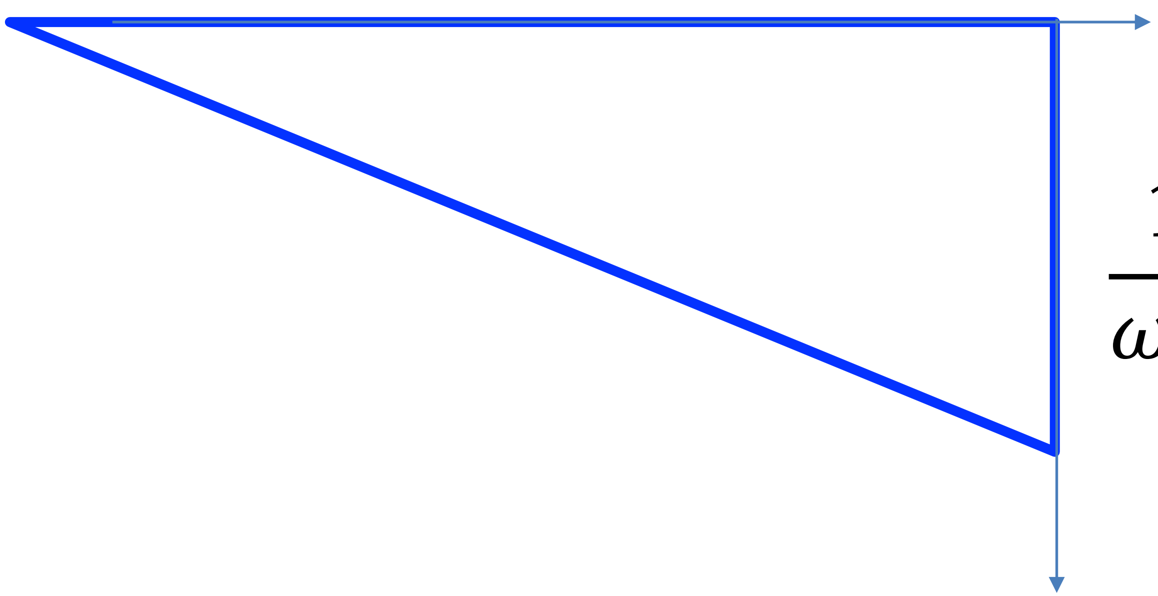
$$\dot{V}_R = 50 + j0$$

$$\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\,\dot{I} = -j39.8 * 1e^{j*0} = 39.8\angle -90^o$$

インピーダンス $\dot{Z}$ とオーム法則の練習：　R-C直列回路

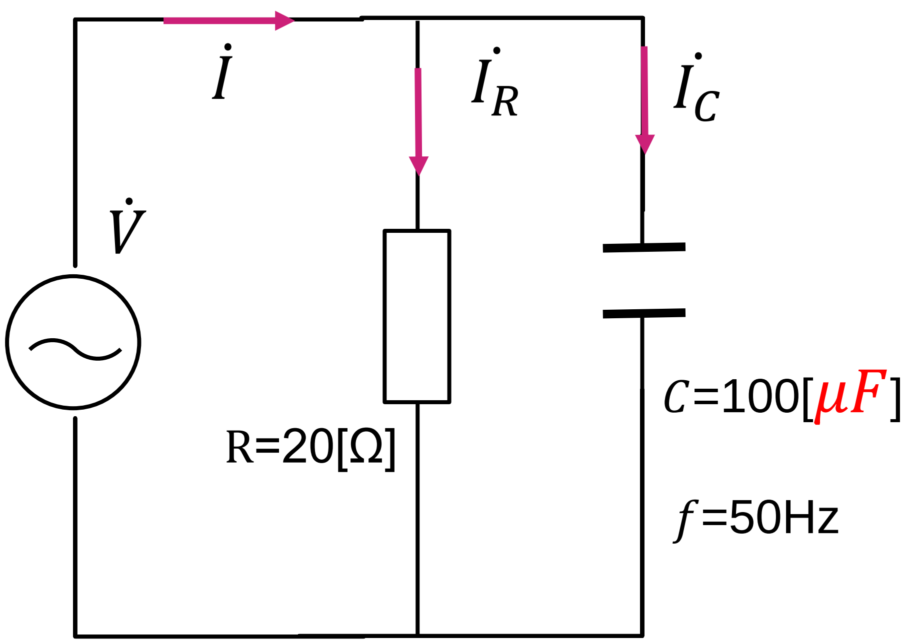
$$\dot{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = 50 - j39.8$$

$$\mathrm{R} = 50$$



$$\frac{1}{\omega C} = 39.8$$

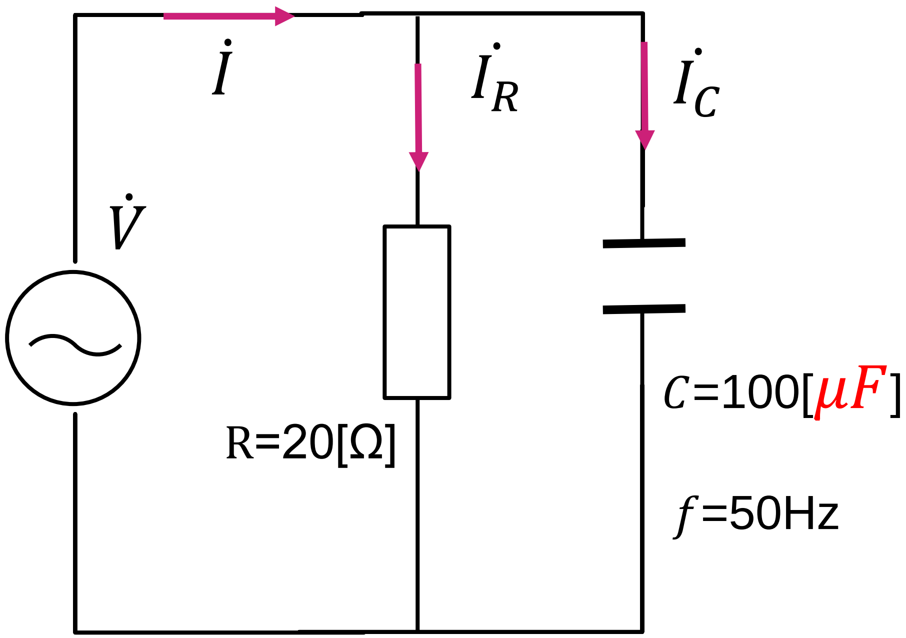
インピーダンス $\dot{Z}$ とオーム法則の練習：　R-C並列回路



$\dot{V} = 100\angle 0^o$

$\dot{I}_R$　$\dot{I}_C$　をもとめなさい

インピーダンス $\dot{Z}$ とオーム法則の練習：R-C並列回路



$$\dot{V} = 100\angle 0^o$$

$$\dot{I}_R = \frac{1}{R} 100\angle 0^o$$

$$= 5\angle 0^o$$

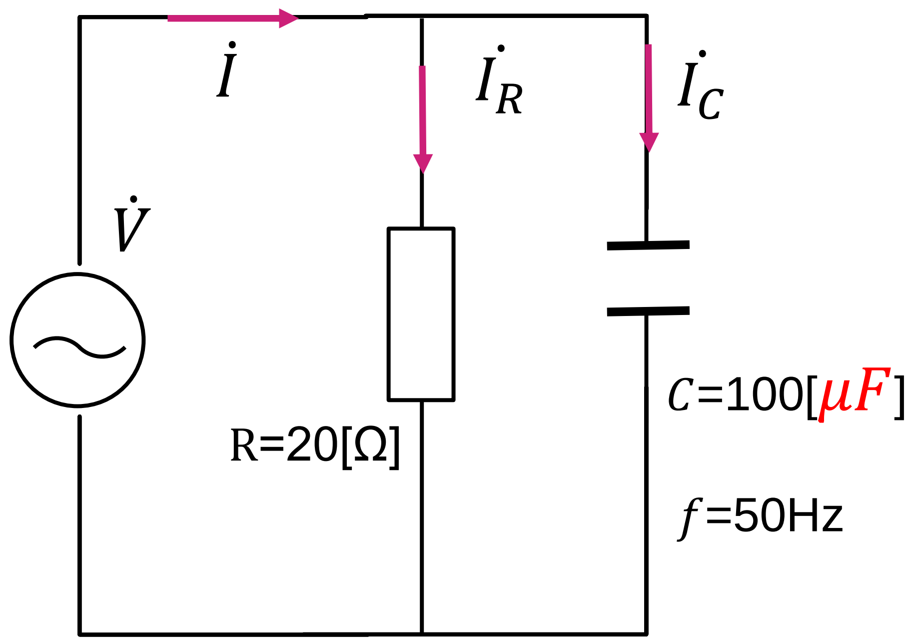
$$\dot{I}_R = 5 + j0$$

$$\omega C = 2\pi * \mathrm{f} * C$$

$$\omega C = 0.0314$$

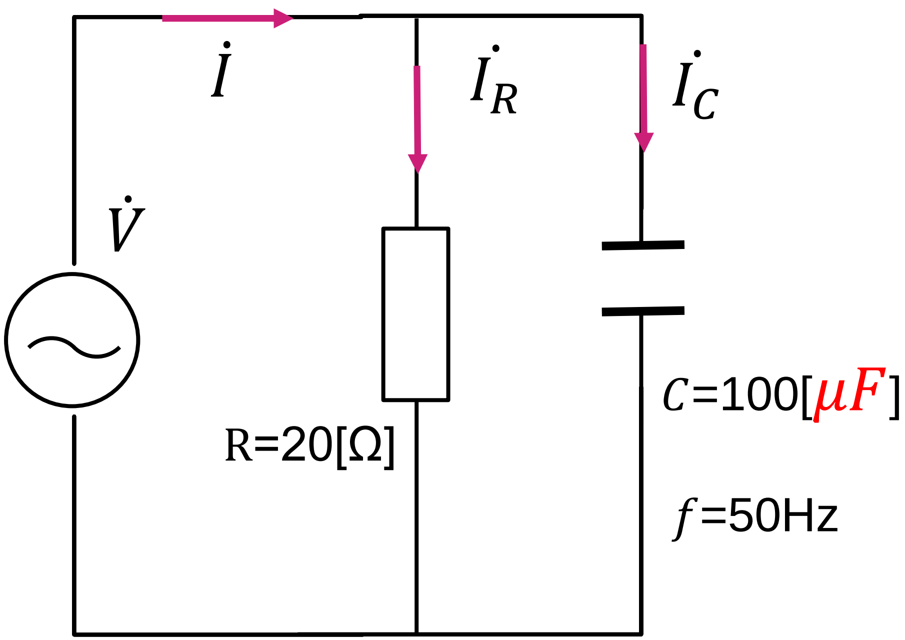
$$\dot{I}_C = \frac{1}{1/j\omega C}\dot{V} = \mathrm{j}0.0314 * 100\angle 0^o$$

インピーダンス $\dot{Z}$ とオーム法則の練習：　R-C並列回路



$\dot{Y}$をもとめなさい

インピーダンス $\dot{Z}$ とオーム法則の練習： R-C並列回路



$$\dot{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{1}{20} + j\omega C = 0.05 + j0.0314$$

$$\dot{Y} = \sqrt{0.05^2 + 0.0314^2}\angle \mathrm{atan}\left(\frac{0.0314}{0.05}\right) = 0.059\angle 32.1^{o}$$

電力と力率

電気料金 ＝

基本料金

基本料金単価
×
契約電力
×
力率割引・割増し

＋

電力量料金

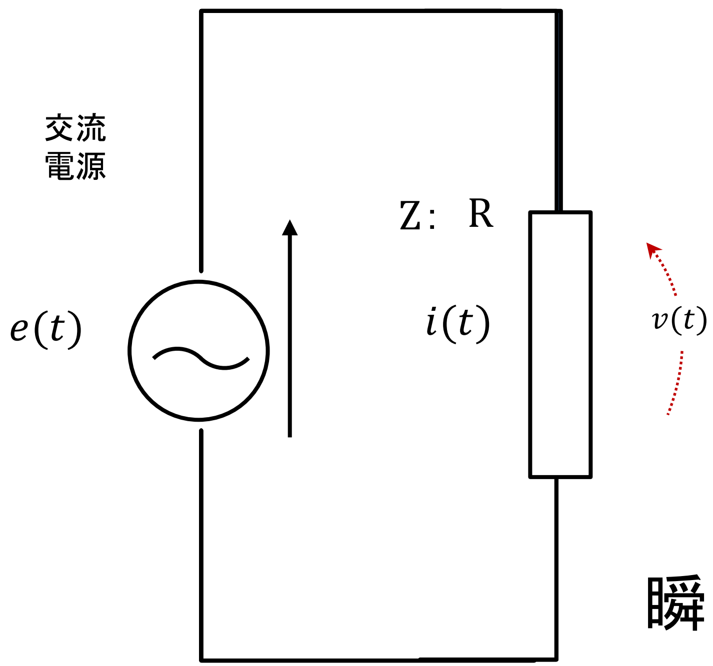
電力量料金単価
×
ご使用電力量
±
燃料費調整額

＋

再生可能エネルギー
発電促進賦課金

再生可能エネルギー
発電促進賦課金単価
×
ご使用電力量

正弦波交流電力の計算：インピダンスは抵抗のみ



$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{E_m}{R}$$ 瞬時値

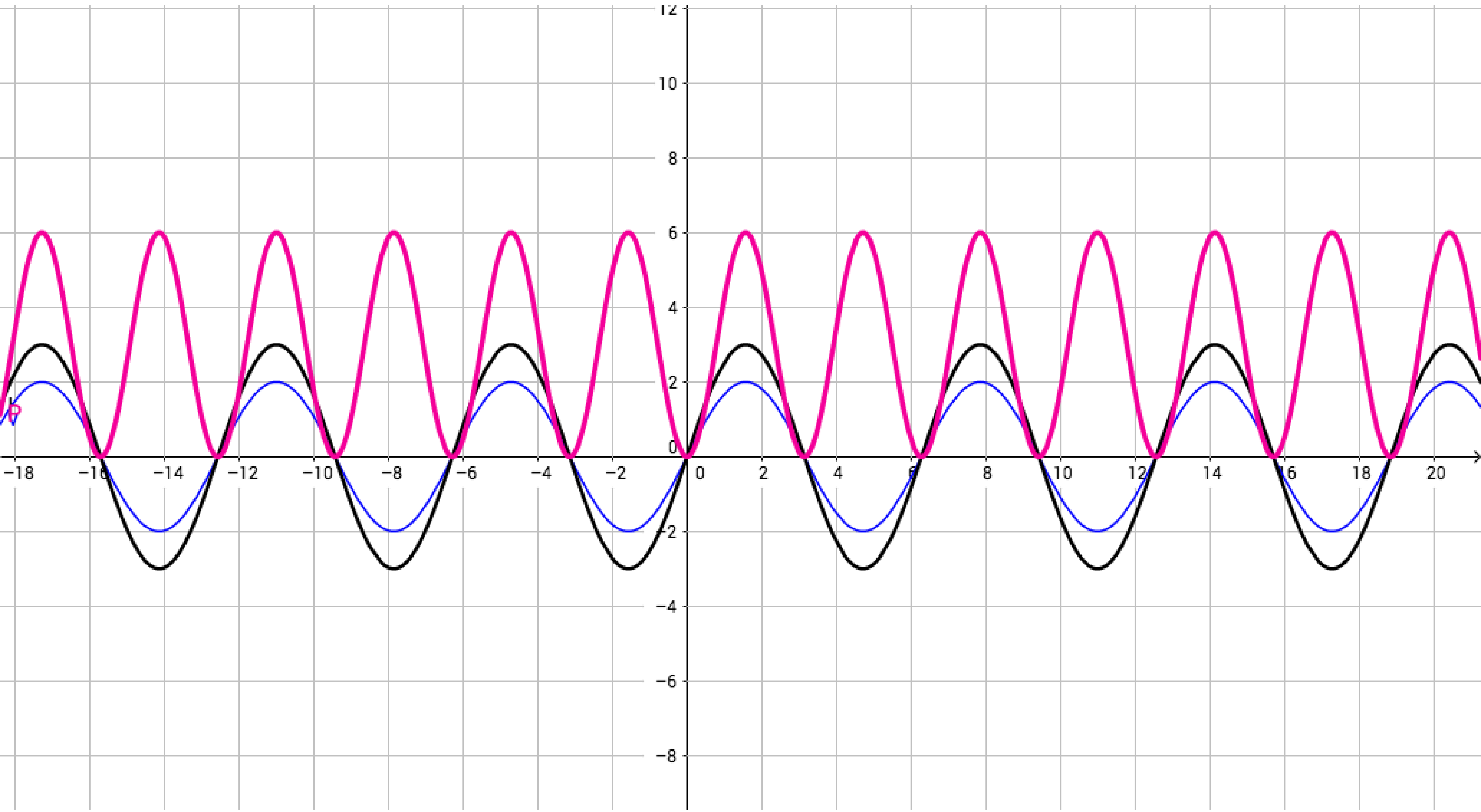
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)$$

瞬時電力 $P(t) = E_m\, I_m\, \sin^2(\omega t + \theta)$

平均電力 $\boldsymbol{P_a} = \int_0^T P(t)\,dt$

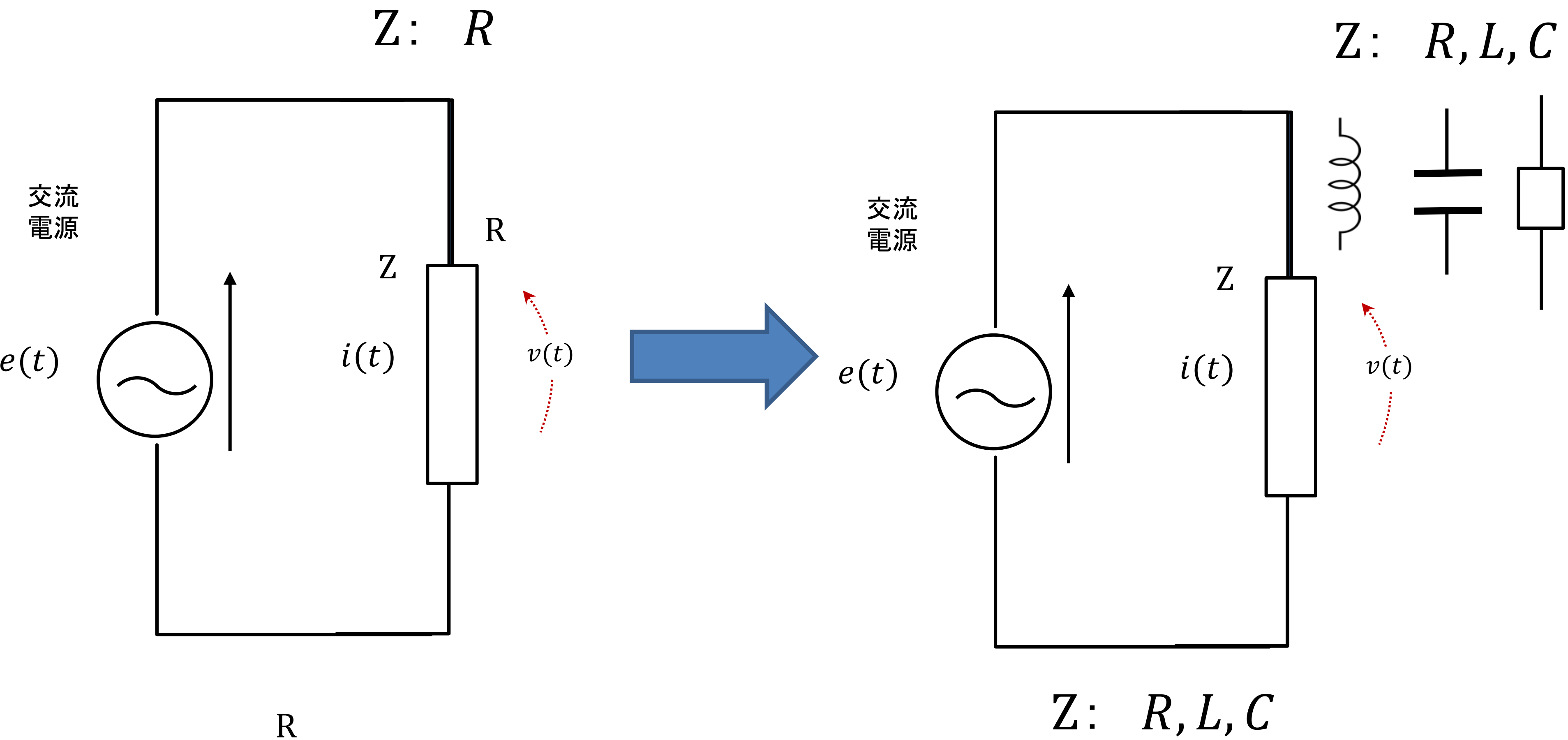
$$\boldsymbol{P_a} = \frac{1}{2} E_m\, I_m = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\boldsymbol{I_m}\;\;\frac{\sqrt{2}}{2}\,\boldsymbol{E_m} = \boldsymbol{I_e}\;\;\boldsymbol{E_e}$$

電流の実効値　　電圧の実効値



10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−18
−14
−12
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
8
10
14
18
20

正弦波交流電力の計算： L, C まで拡張する



位相の遅れと進みがない
電流電圧が同一位相

位相の遅れと進みが生じる
電流電圧の位相が異なる！

正弦波交流電力の計算: R, L, C まで拡張する

$$v(t) = \sqrt{2}\ V_E \sin(\omega t + \theta_v)$$

$$i(t) = \sqrt{2}\ I_E\ \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$p(t) = v(t) * i(t)$$

$$p(t) = V_E I_E \{ \cos(\theta_I - \theta_v) - \cos(2\omega t + \theta_I + \theta_v \}$$

$$p(t) = V_E I_E \{ \cos(\theta_V - \theta_I) - \cos(2\omega t + \theta_I + \theta_v \}$$

正弦波交流電力の計算:

$\theta = \theta_I = \theta_v$ 抵抗のみの場合

$$p(t) = V_e I_e \{1 - \cos(2\omega t + \theta_I + \theta_v)\}$$

$$p(t) = V_e I_e (1 - \cos(2\omega t + 2\theta))$$

$$p(t) = 2V_e I_e \sin^2(\omega t + \theta)$$

$\theta_I \neq \theta_v$ 抵抗、コイル とコンデンサがある場合

$$p(t) = V_e I_e \{ \cos(\theta_I - \theta_v) - \cos(2\omega t + \theta_I + \theta_v \}$$

正弦波交流電力: 有効電力 ⇔ 抵抗

$\theta = \theta_I = \theta_v$ 抵抗のみの場合

$$p(t) = 2V_e I_e \sin^2(\omega t + \theta)$$

$$p(t) = V_e I_e \{1 - \cos(2\omega t + \theta_I + \theta_v)\}$$

$$\boldsymbol{P} = \int_0^T P(t)\,dt$$

$$\boldsymbol{P} = V_e I_e$$

正弦波交流電力: 有効電力 ⇔ 抵抗、コンデンサ、コイル

$\theta_I \neq \theta_v$ 抵抗、コイルとコンデンサがある場合

$$p(t) = V_e I_e \{ \cos(\theta_I - \theta_v) - \cos(2\omega t + \theta_I + \theta_v) \}$$

$$\boldsymbol{P} = \int_0^T P(t)\, dt$$

$$\boldsymbol{P} = V_e I_e \cos(\theta_I - \theta_v)$$ 有効電力

有効電力$\boldsymbol{P}$と力率

$$\boldsymbol{P} = V_e\, I_e \cos(\theta_I - \theta_v) \qquad \boldsymbol{P} = V_e\, I_e$$

位相角: $\theta = \theta_I - \theta_v$

$$\boldsymbol{P} = V_e\, I_e \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\boldsymbol{P}}{V_e\, I_e}$$

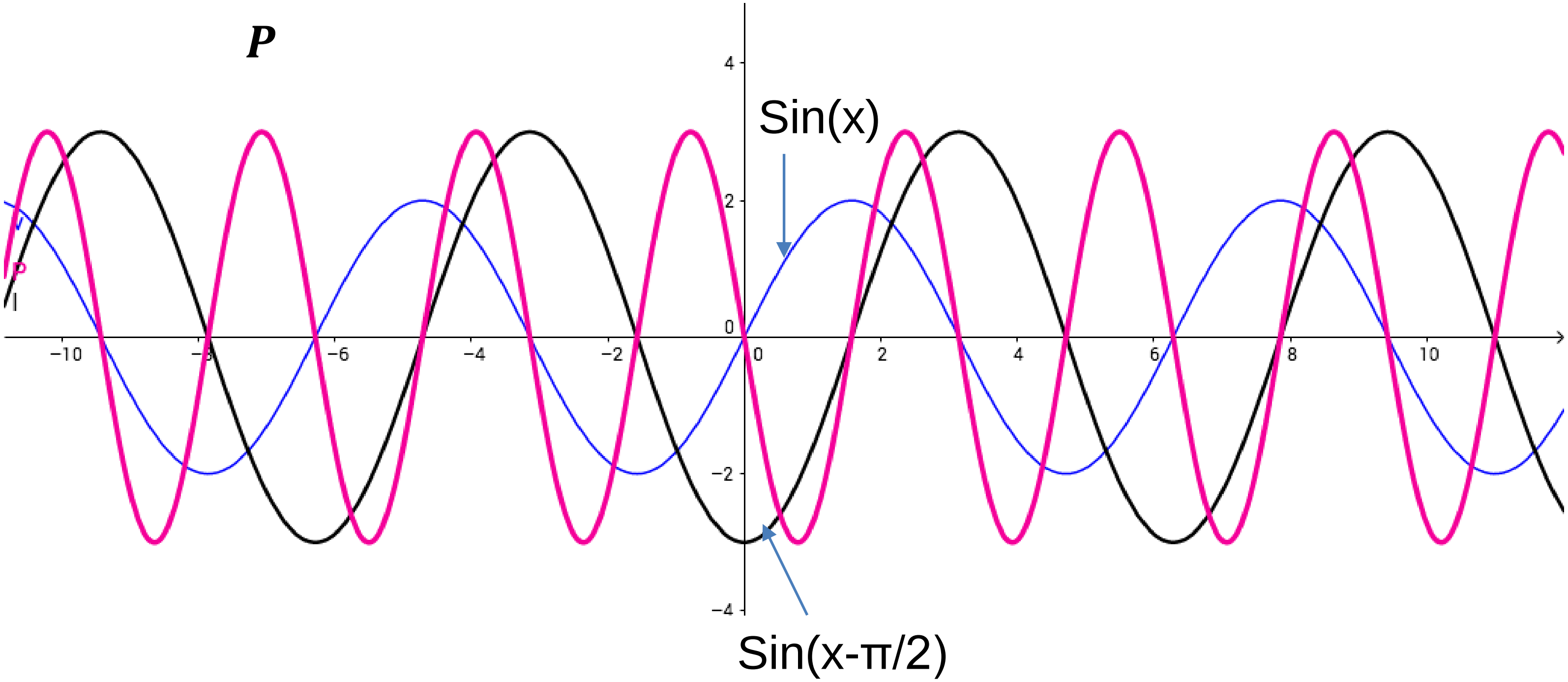
$\cos(\theta)$：力率

有効電力Pと力率

コンデンサ:　$\cos(\theta) = \cos(-90) = 0$

コイル:　$\cos(\theta) = \cos(90) = 0$

$$\boldsymbol{P} = V_e\, I_e \cos(\theta) = 0$$



各回路素子における有効電力$\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P} = V_e\, I_e \quad \cos\,(\theta)$$

抵抗:　$\cos(\theta) = \cos(0) = 1$　$\boldsymbol{P} = V_e\, I_e$

コイル:　$\cos(\theta) = \cos(90) = 0$　$\boldsymbol{P} = 0$

コンデンサ:　$\cos(\theta) = \cos(-90) = 0$　$\boldsymbol{P} = 0$

有効電力（W)

$$\boldsymbol{P} = V_e\, I_e \quad \boxed{\cos\,(\theta)}$$

有効電力:W

力率

$\boldsymbol{P}$

無効電力

$$P_r = V_e I_e \boxed{\sin(\theta)}$$

無効電力:var（バール）

P_r : rは$reactive$

皮相電力 : P_a

皮相電力 : $P_a = V_e\, I_e$

P_a : aは$apparent$

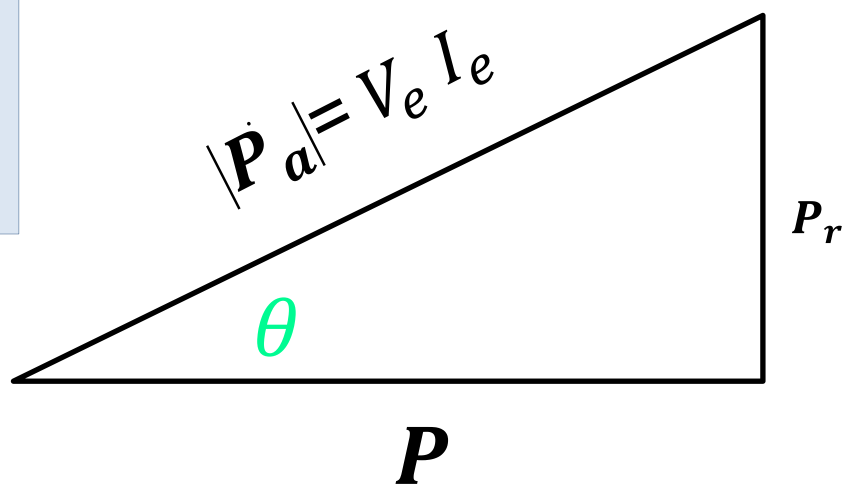
皮相電力 P_a

皮相電力 : VA（ボルトアンペア）

電力の複素数表示:

$$P = P_a \cos(\theta)$$

$$P_r = P_a \sin(\theta)$$



$$\dot{P}_a = P + jP_r$$

$$\dot{P}_a = |\dot{P}_a| \cos(\theta) + j|\dot{P}_a| \sin(\theta)$$

$$\dot{P}_a = V_e I_e * e^{j\theta} = V_e I_e \angle \theta$$

電力の複素数表示:

$$\dot{P}_a = V_e\, I_e * e^{j\theta} = V_e\, I_e \angle\theta$$

$$\theta = \theta_I - \theta_v$$

$$\dot{P}_a = V_e\, I_e * e^{j(\theta_I - \theta_v)}$$

$$\dot{P}_a = V_e\, e^{j(-\theta_v)} * I_e e^{j(\theta_I)}$$

電力の複素数表示:

$\theta = \theta_I - \theta_V$

$$\dot{P}_a = V_e e^{j(-\theta_v)} * I_e e^{j(\theta_I)}$$

$$\dot{V} = V_e e^{j(\theta_v)}$$

$$\bar{\dot{V}} = V_e e^{j(-\theta_v)}$$

$$\dot{I} = I_e e^{j(\theta_I)}$$

$$\dot{P}_a = \bar{\dot{V}} * \dot{I}$$

$\theta = \theta_V - \theta_I$

$$\dot{P}_a = \bar{\dot{I}} * \dot{V}$$

複素数の共役

$a + jb$

$\bar{a} = a$

$\overline{jb} = -jb$

$\overline{a + jb} = a - jb$

$\overline{3 + j4b} = 3 - j4$

有効電力の複素数表示:

$$\dot{P}_a = P + jP_r$$

P 有効電力 P_r 無効電力

$$Z = R + jX$$

$$\dot{P}_a = VI^* = ZI * I^* = (R + jX)|I|^2$$

$$\dot{P}_a = VI = ZI * I = \boxed{R|I|^2} + j\,\boxed{X|I|^2}$$

P P_r

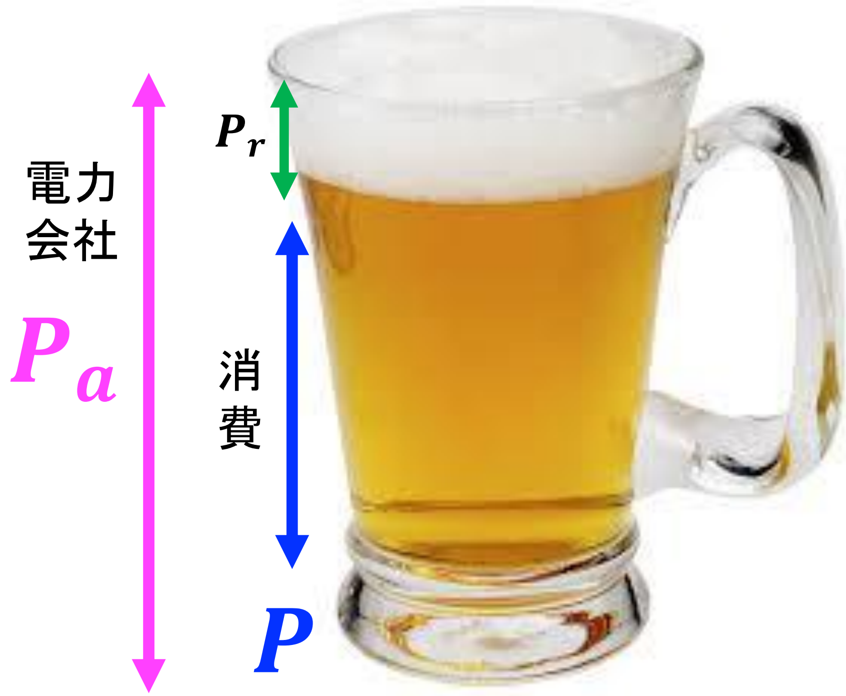
力率と電気料金の関係:

電気料金 ＝ 基本料金（基本料金単価 × 契約電力 × 力率割引・割増し） ＋ 電力量料金（電力量料金単価 × ご使用電力量 ± 燃料費調整額） ＋ 再生可能エネルギー発電促進賦課金（再生可能エネルギー発電促進賦課金単価 × ご使用電力量）

家電の力率の値(目安)		原因	位相
蛍光灯	80〜90%	コイル	遅れる
エアコン	70〜90%	コイル	遅れる
冷蔵庫	コイル(モーター)	コイル(モーター)	遅れる
掃除機	60〜65%	コイル(モーター)	遅れる
洗濯機	70〜80%	コイル(モーター)	遅れる

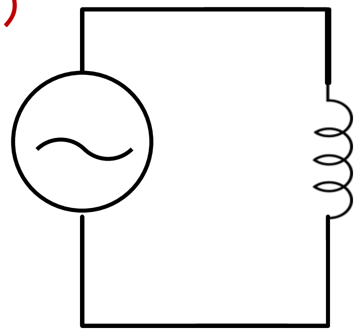
力率と電気料金の関係:

電力会社は力率が悪い事を嫌う理由	
(1)	電気代は有効電力分 P しか請求できない
(2)	電気供給の際に、有効電力よりも大きい電力が必要なため発電、送電、変電などの設備に投資がかかる

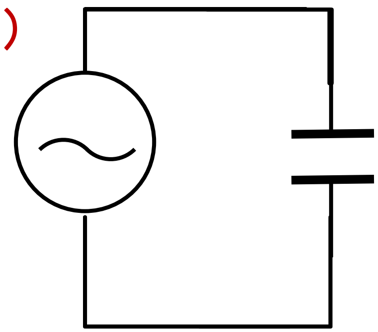


力率の改善方法

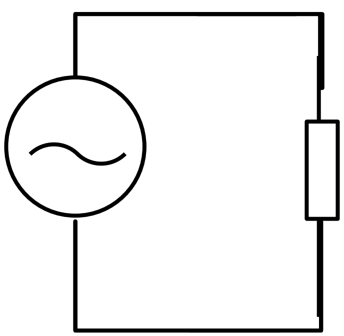
（1）



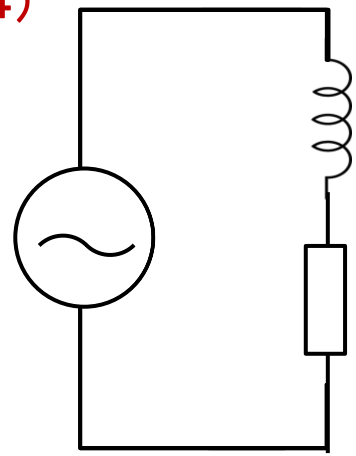
（2）



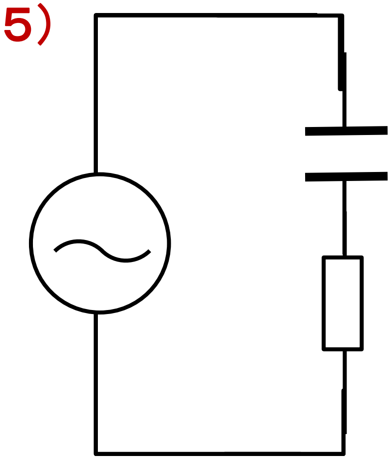
（3）



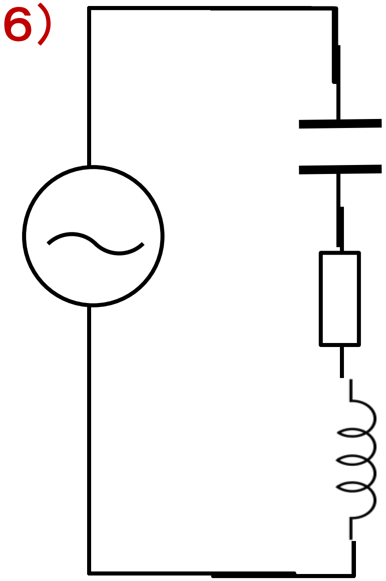
（4）



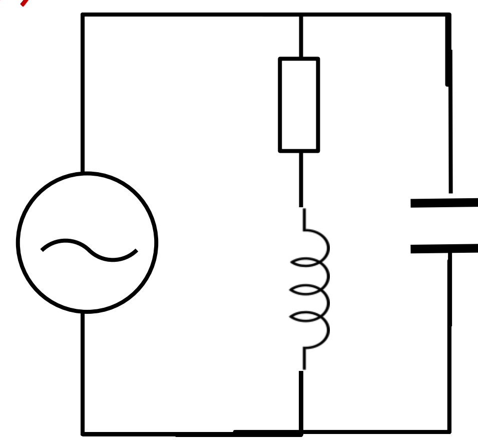
（5）



（6）



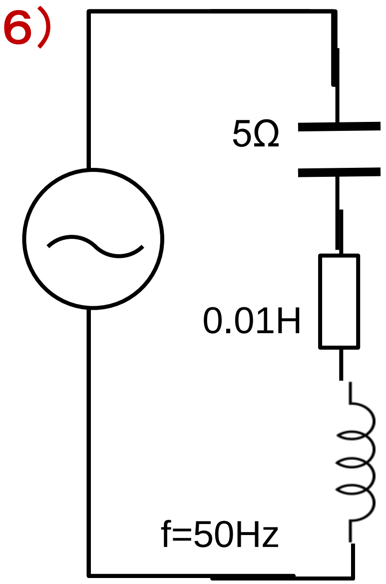
（7）



力率の改善方法−1

R, L, Cの直列回路に $v(t) = \sqrt{2}\,V\sin(\omega t-\theta)$を加えると**複素数インピーダンス** $\dot{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$となる。有効電力を計算してください。力率が1になるようなキャパシタンスCを求めなさい！、

（6）



$$\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{e}^{-j\theta}$$

$$\dot{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{\omega L} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\omega C}}\right) = \sqrt{\boldsymbol{R}^2 + \left(\boldsymbol{\omega L} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\omega C}}\right)^2}\,\boldsymbol{e}^{j\varphi}$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\dot{\boldsymbol{I}} = \frac{\boldsymbol{V}\boldsymbol{e}^{-j\theta}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,e^{j\varphi}} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{e}^{-j(\theta+\varphi)}$$

力率の改善方法

$$\dot{P}_a = \bar{\dot{I}} * \dot{V}$$

$$\dot{P}_a = Ve^{-j\theta} * Ie^{j(\theta+\varphi)}$$

$$\dot{P}_a = VIe^{j\varphi}$$

$$\dot{P}_a = VI\,cos\varphi + j\,VI\,sin\varphi$$

有効電力　　　　無効電力

力率の改善方法

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{VI}\,(\,\boldsymbol{cos}\varphi + \;j\,sin\varphi\,)$$

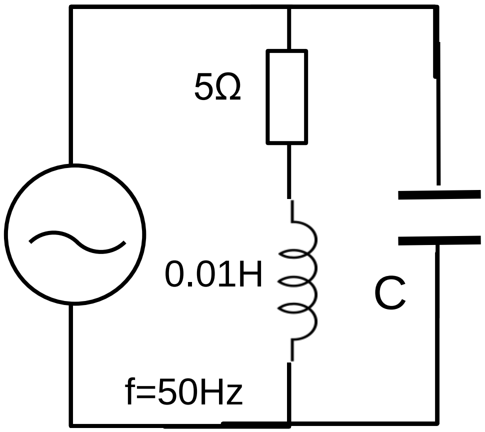
$$\varphi = \operatorname{atan}\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\varphi = 0 \qquad \Rightarrow \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{314^2 * 0.01} = 0.001F = 1mF$$

力率の改善方法−2

（7）



図示したRLC回路に正弦波交流を加えた時に力率$cos\varphi$=1になるようなキャパシタンスCの値を求めなさい！

$$\frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C$$

$$\frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1 + j\omega CR - \omega^2 LC}{R + j\omega L}$$

$$\dot{Z} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$

$$\dot{Z} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$

計算が難しくなる！

力率の改善方法

アドミタンス$\dot{Y}$を使って計算する！

$$\dot{Y} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C$$

$$\dot{Y} = \frac{R - j\omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} + j\omega C$$

$$\dot{Y} = \frac{R}{\omega^2 L^2 + R^2} - \frac{j\omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} + j\omega C$$

$$\dot{Y} = \frac{R}{\omega^2 L^2 + R^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{\omega^2 L^2 + R^2}\right)$$

力率の改善方法

$\boldsymbol{cos\varphi}$=1 ⇨ φ=0 ➡ 虚部がゼロになる！

$\dot{Z}$は実数になる

$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}$も実数になる

$$\dot{Y} = \frac{R}{\omega^2 L^2 + R^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{\omega^2 L^2 + R^2}\right)$$

$$\omega C = \frac{\omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \longrightarrow C = \frac{L}{\omega^2 L^2 + R^2}$$

$$C = \frac{0.01}{3.14^2 + 5^2} = 287 * 10^{-6}(F) = 287uF$$