



**i-PERC**

**電気通信大学**

# 基礎電子工学CH-6

**曾我部 東馬**

**電気通信大学**

**i-パワードエネルギーシステム研究センター(i-PERC)**

# ゾンマーフェルトモデル

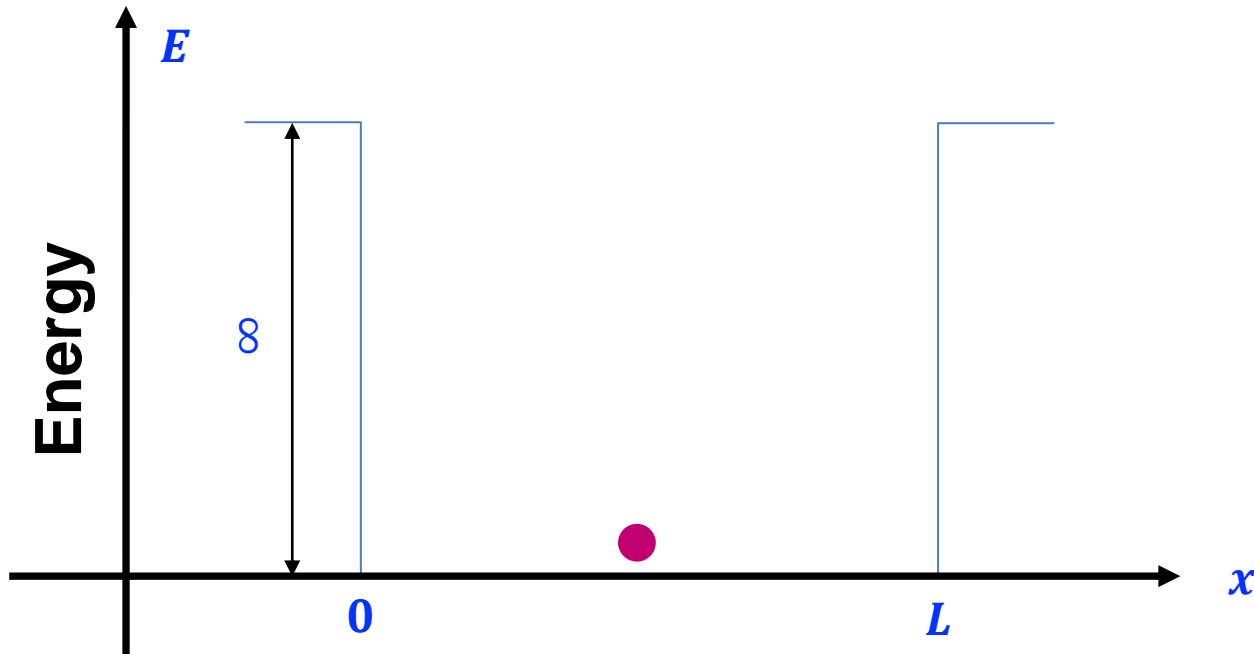
## ゾンマーフェルトモデル (Sommerfeld model)



電子は金属内では自由電子である。空気が絶縁体なので、電子が金属棒から出ることはできないようになっている

空気が絶縁体であること、すなわち、金属とポテンシャルのバリア高さは

$\infty$



# 初期条件

電子は  $0 \leq x \leq L$  の範囲では、  $V = 0$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \Psi(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \Psi(x) = 0$$

電子は  $x \geq L, x \leq 0$  の範囲では、  $V = \infty$

電子の存在確率は0である

$$\Psi(x) = 0 \quad \Psi(0) = 0 \quad \Psi(L) = 0$$

# 境界条件は物理の描像を変える

連続条件が成立するため、電子は  $0 \leq x \leq L$  の範囲では、 $V = 0$  であるとともに、 $\Psi(0) = 0$  と  $\Psi(L) = 0$  という境界条件が成り立たないといけない。

## 解く問題

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E) \Psi(x) = 0 \\ \Psi(0) = 0 \quad \Psi(L) = 0 \end{array} \right.$$

# 計算方法：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E) \Psi(x) = 0 \\ \Psi(0) = 0 \quad \Psi(L) = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Dy = 0 \quad y = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

**一般解：**  $\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

# 計算方法：

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ \Psi(0) = 0 \quad \Psi(L) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 0 \rightarrow B = -A \\ Ae^{ikL} + Be^{-ikL} = 0 \end{array} \right.$$

$$Ae^{ikL} - Ae^{-ikL}$$

$$2A \sin(kL) = 0 \quad 2A = C$$

# 計算方法：

$$2A \sin(kL) = 0 \quad kL = n\pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \frac{n\pi}{L} \\ B = -A \end{array} \right.$$

# 計算方法：

$$\Psi(x) = C \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E) \Psi(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} = - \left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\right) = - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Psi(x)$$

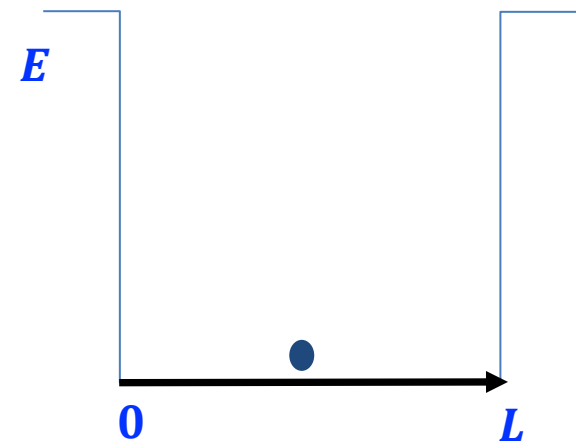
$$- \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E) \Psi(x) = 0$$

$$- \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{2m}{\hbar^2} (E) = 0$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$



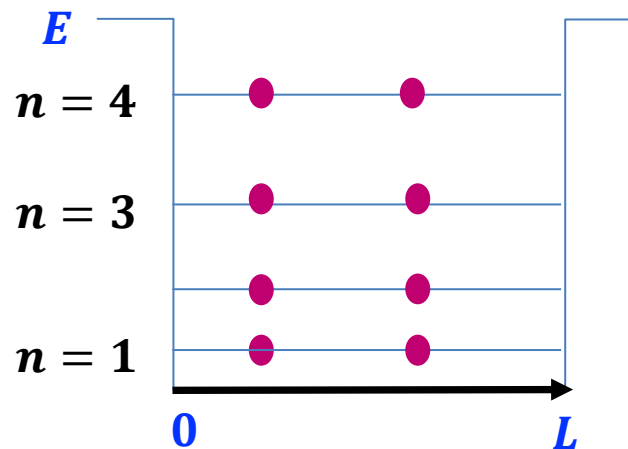
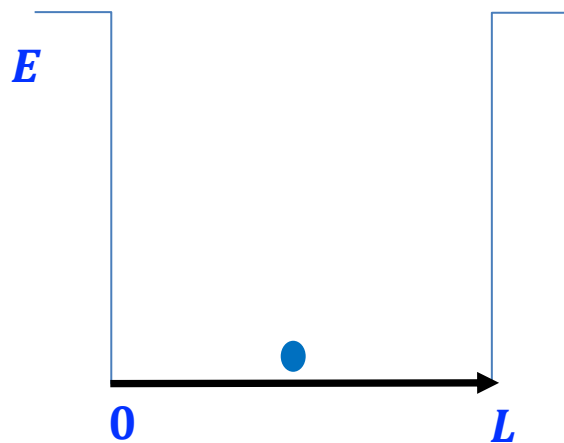
# 単位長さの電子数



$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$E \leq \frac{\hbar^2}{2m} (k)^2, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

電子の並び方



$$\text{電子数} = n \times 2$$

# 単位長さの電子数: $N(E)$

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = \frac{L}{\pi} k = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{L\sqrt{2m}}{\hbar\pi} \sqrt{E}$$

$$\text{電子数} = n \times 2$$

$$\text{電子数} = \frac{\sqrt{2mL}}{\hbar\pi} \sqrt{E} \times 2$$

$$\text{単位長さの電子数 } n = \frac{\text{電子数}}{L} = \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar\pi} \sqrt{E}$$

# 単位長さ・単位エネルギーの電子数

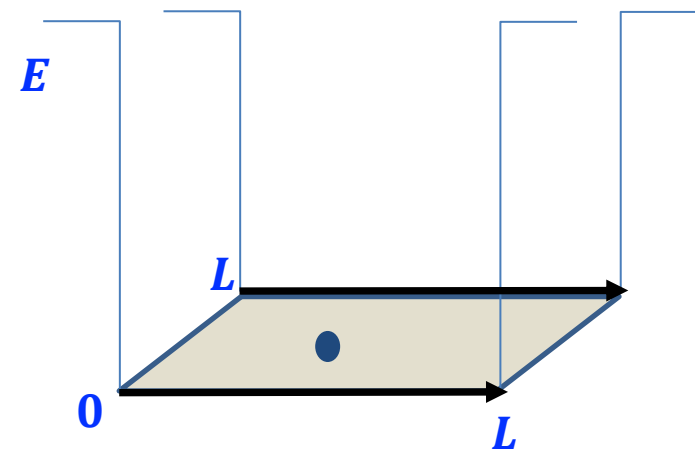
単位長さの電子数  $n = \frac{\text{電子数}}{L} = \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar\pi} \sqrt{E}$

$$N(E) = \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar\pi} \sqrt{E}$$

単位エネルギーの電子数  $D(E)$

$$D(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar\pi} \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar\pi} E^{-\frac{1}{2}}$$

# 単位面積の電子数 $N(E)$



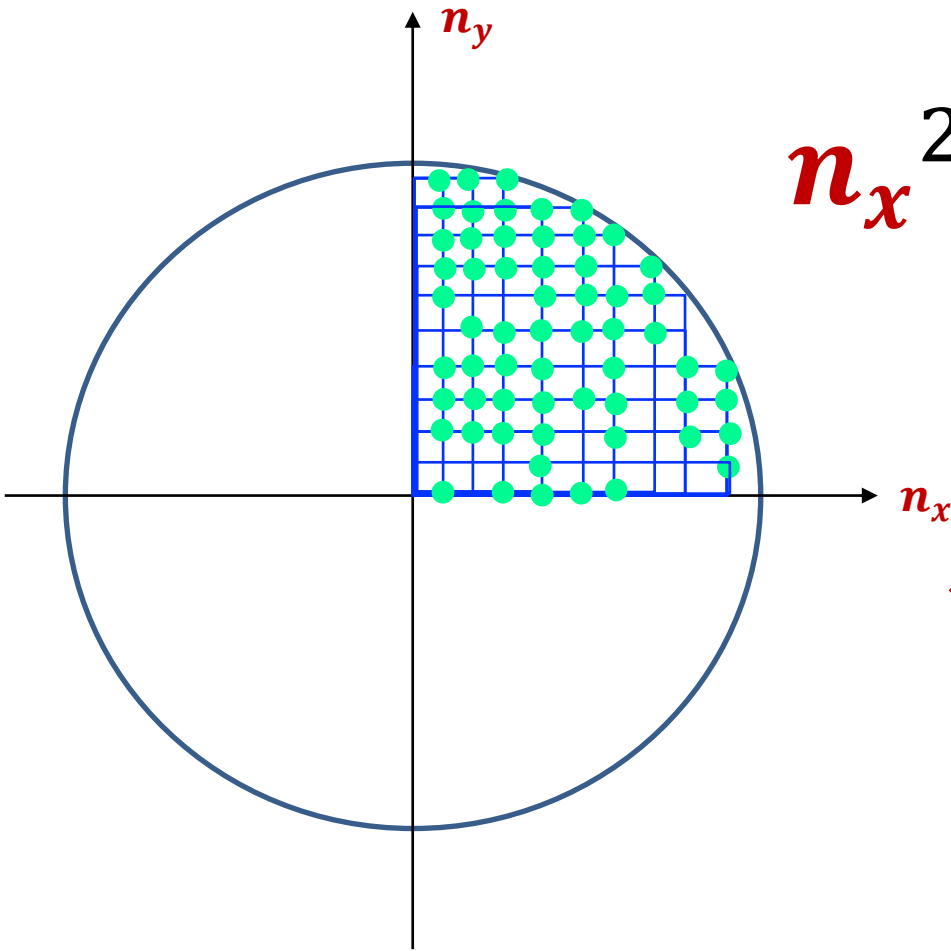
$$k_x = \frac{n_x \pi}{L}, k_y = \frac{n_y \pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$E \geq \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2),$$

$$E \geq \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left[ \frac{n_x \pi}{L} \right]^2 + \left[ \frac{n_y \pi}{L} \right]^2 \right)$$

$$n_x^2 + n_y^2 \leq \frac{L^2}{\pi^2} \frac{2m}{\hbar^2} E$$

電子数( $n_x, n_y$ の組み合わせ)と円( $n_x, n_y$ )の面積の関係:



$$n_x^2 + n_y^2 = \frac{L^2 2m}{\pi^2 \hbar^2} E$$

$n_x$ と $n_y$ の組み合わせの数は円の面積の $\frac{1}{4}$ で近似できると仮定する

$$\text{電子数} \approx \frac{1}{4} \times \text{円の面積} \times 2 = \frac{1}{2} \pi r^2 = \pi \frac{L^2 2m}{\pi^2 \hbar^2} E = \frac{L^2 2m}{\pi \hbar^2} E$$

単位面積・単位エネルギーの電子数  $D(E)$

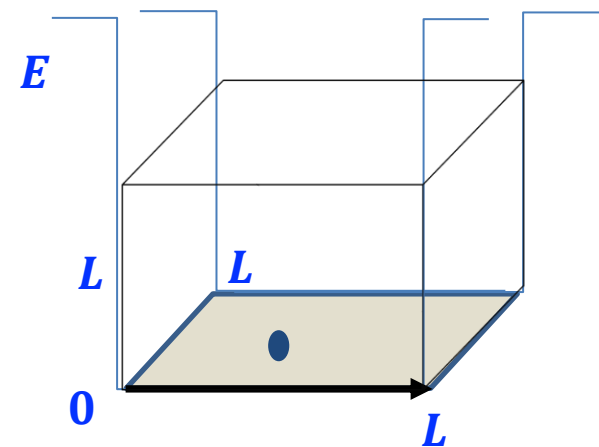
単位面積の電子数  $N(E)$

$$N(E) = \frac{\text{電子数}}{L^2} = \frac{2m}{\pi} \frac{1}{\hbar^2} E$$

単位面積・単位エネルギーの電子数

$$D(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{2m}{\pi} \frac{1}{\hbar^2}$$

# 単位体積の電子数 $n(E)$



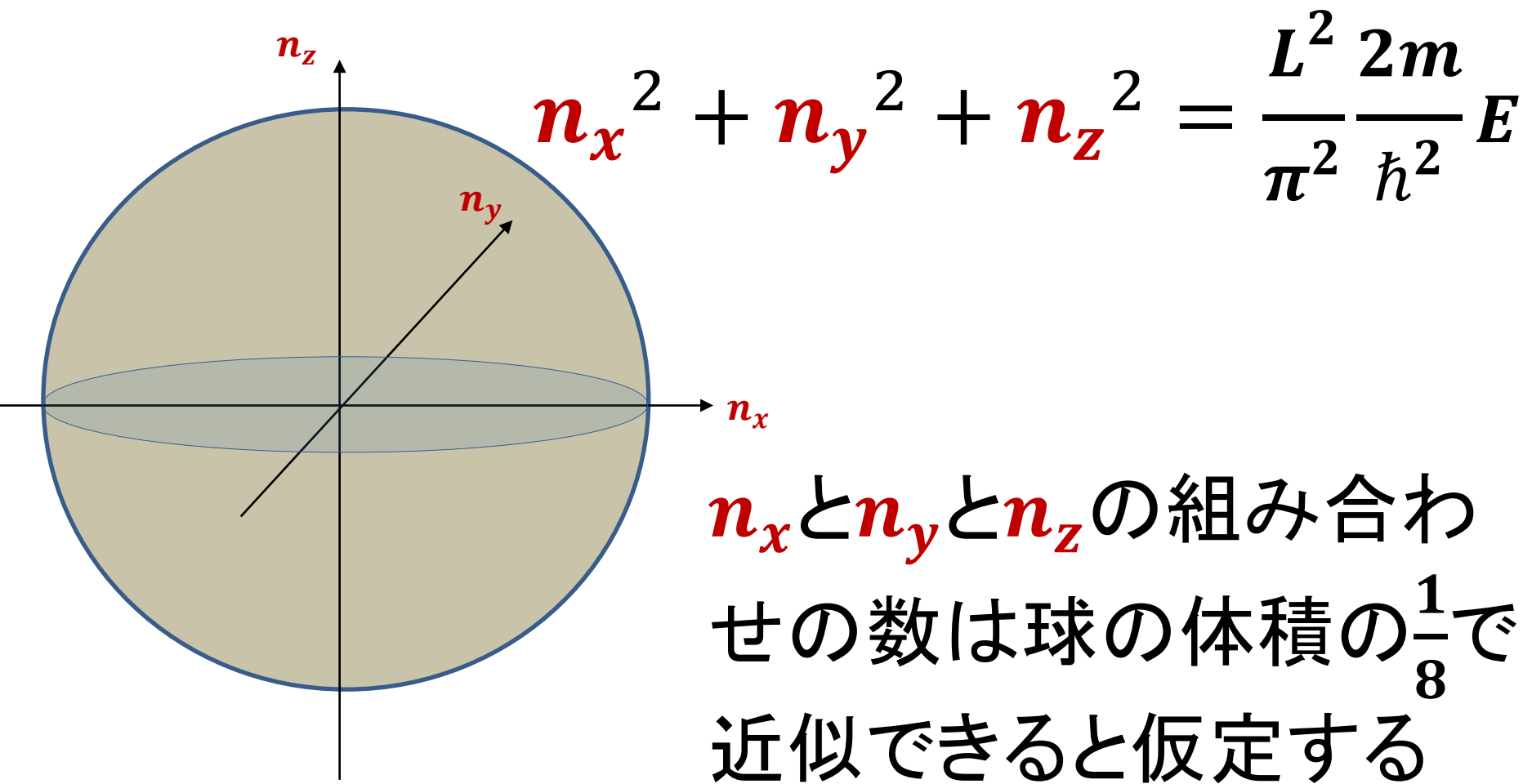
$$k_x = \frac{n_x \pi}{L}, k_y = \frac{n_y \pi}{L}, k_z = \frac{n_z \pi}{L}, n = 1, 2, 3,$$

$$E \geq \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2),$$

$$E \geq \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left[ \frac{n_x \pi}{L} \right]^2 + \left[ \frac{n_y \pi}{L} \right]^2 + \left[ \frac{n_z \pi}{L} \right]^2 \right)$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \leq \frac{L^2}{\pi^2} \frac{2m}{\hbar^2} E$$

電子数( $n_x, n_y, n_z$ )の組み合わせ)と球( $n_x, n_y, n_z$ )の体積の関係:



$$\text{電子数} = \frac{1}{8} \times \text{球の体積} \times 2 = \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \pi \left( \sqrt{\frac{L^2}{\pi^2} \frac{2m}{\hbar^2} E} \right)^3$$



# 単位面積・単位エネルギーの電子数 $D(E)$

$$\text{電子数} = \frac{1}{3} \pi \left( \sqrt{\frac{L^2}{\pi^2} \frac{2m}{\hbar^2} E} \right)^3 = \frac{1}{3} \frac{L^3}{\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{3}{2}}$$

## 単位体積の電子数 $N(E)$

$$N(E) = \frac{1}{3} \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{3}{2}}$$

## 単位面積・単位エネルギーの電子数

$$D(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}$$

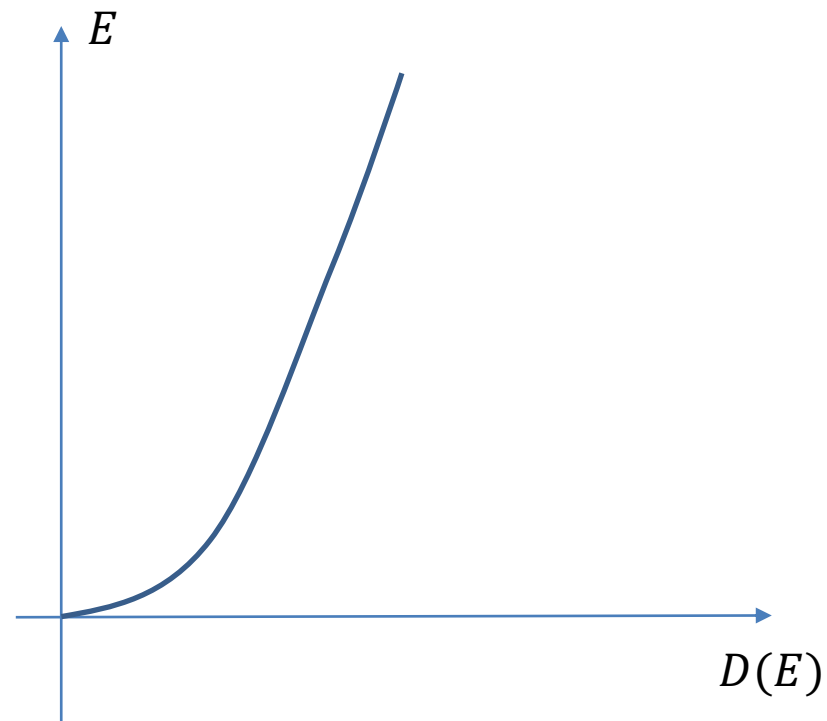
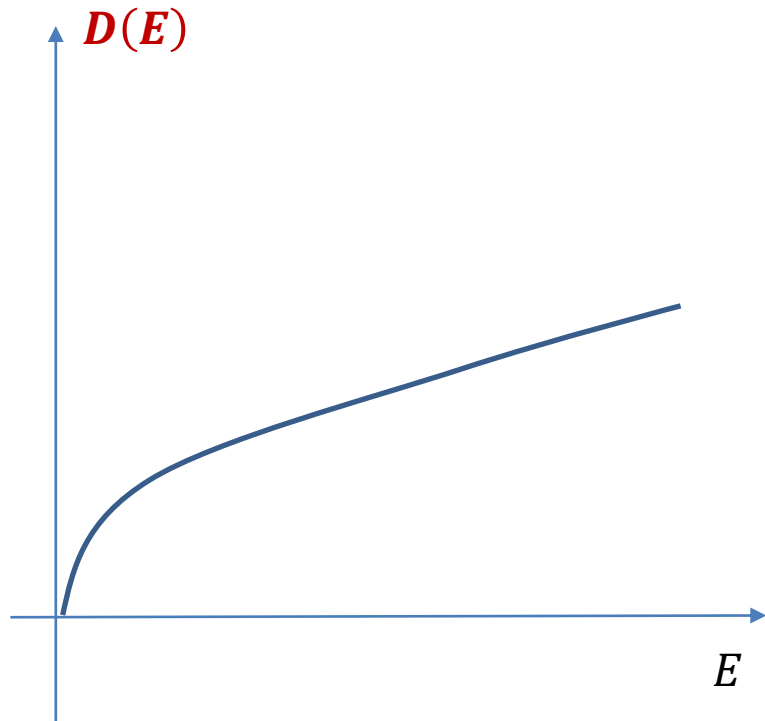
# 単位面積・単位エネルギーの電子数 $D(E)$

$$D(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}$$

$$h = 2\pi\hbar \quad h^2 = 4\pi^2\hbar^2$$

$$D(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{8\pi^2 m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}$$

# 状態密度 $D(E)$



$$n(E) = \int_{E_1}^{E_n} D(E) \times \text{分布関数} dE$$

# 分布関数 $f(E)$

Maxwell-Boltzmann 分布関数

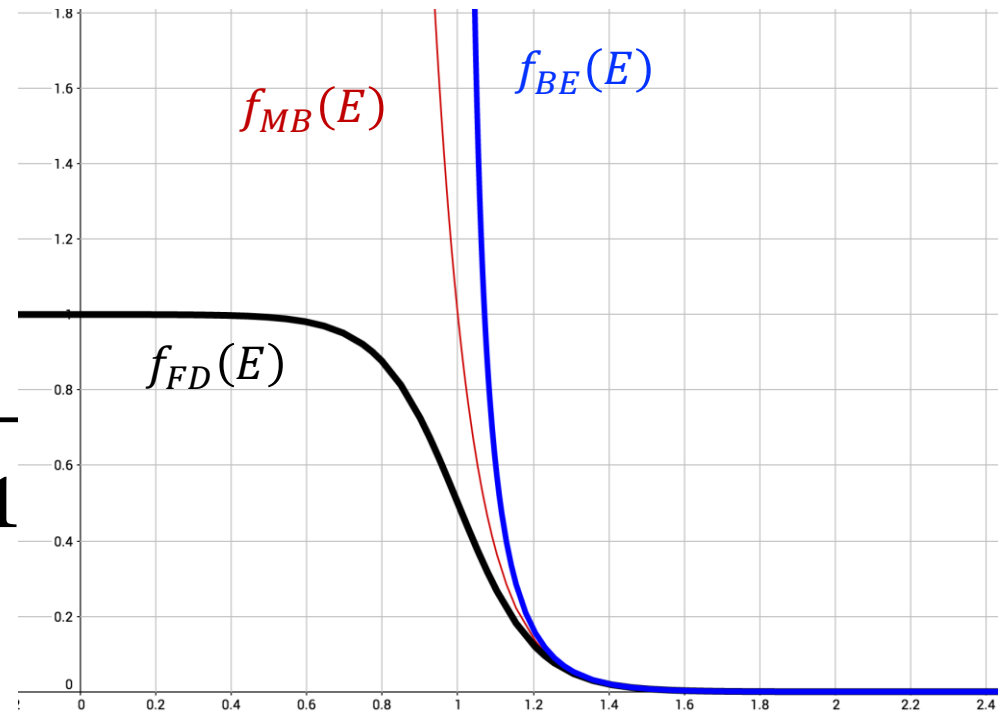
$$f_{MB}(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - u}{kT}\right)}$$

Fermi-Diracの分布関数

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - u}{kT}\right) + 1}$$

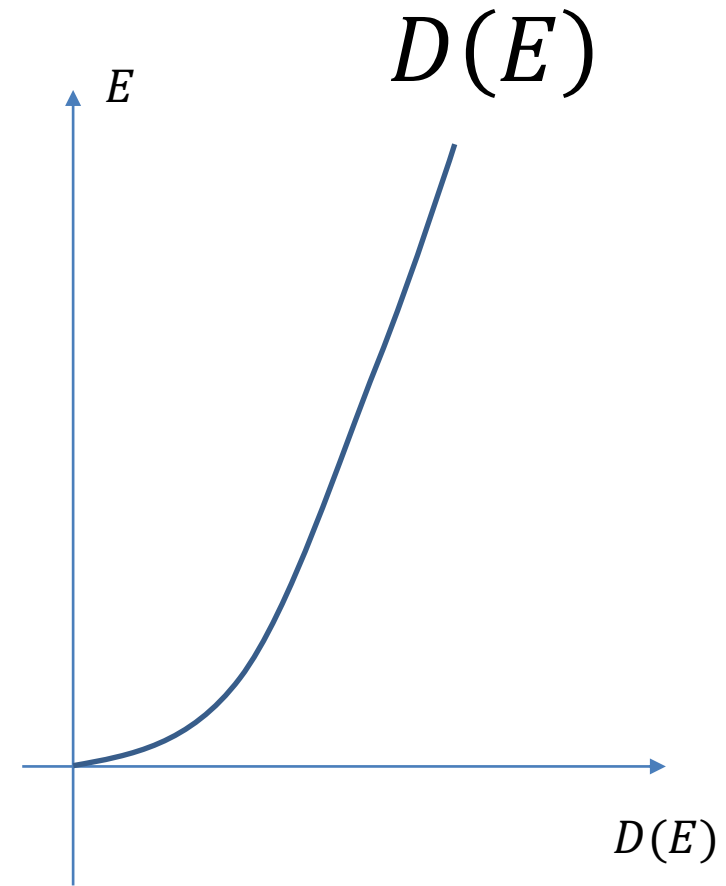
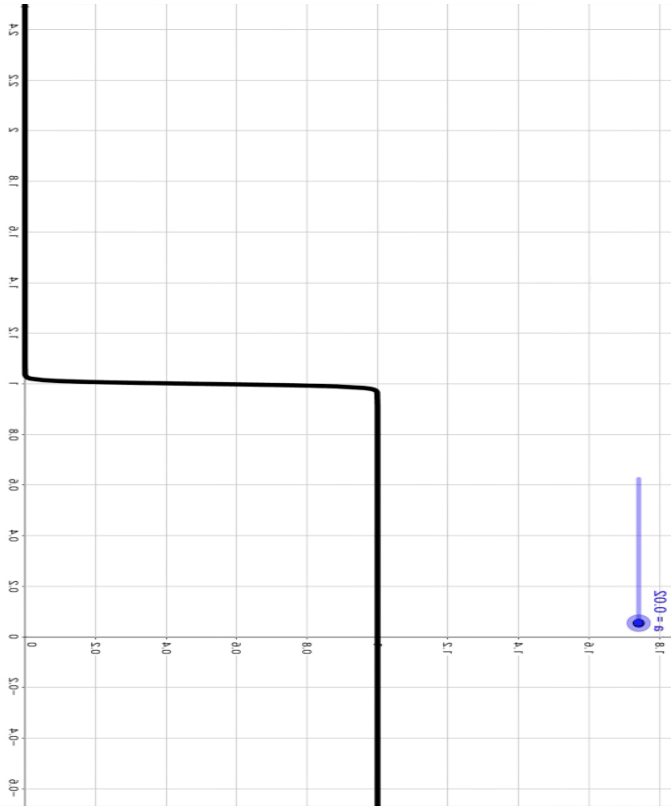
Bose-Einstein分布関数

$$f_{BE}(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - u}{kT}\right) - 1}$$



$u = 1$

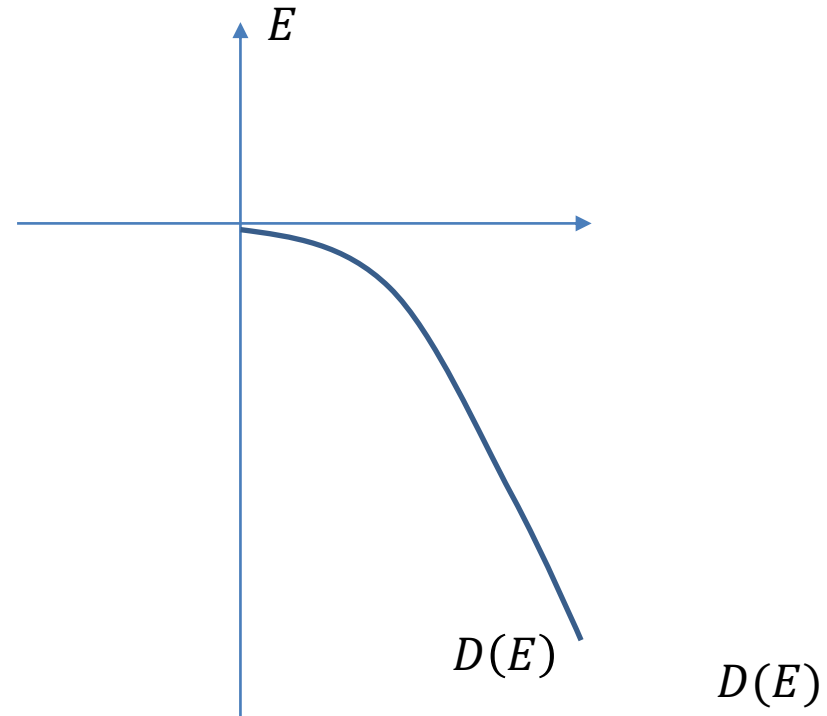
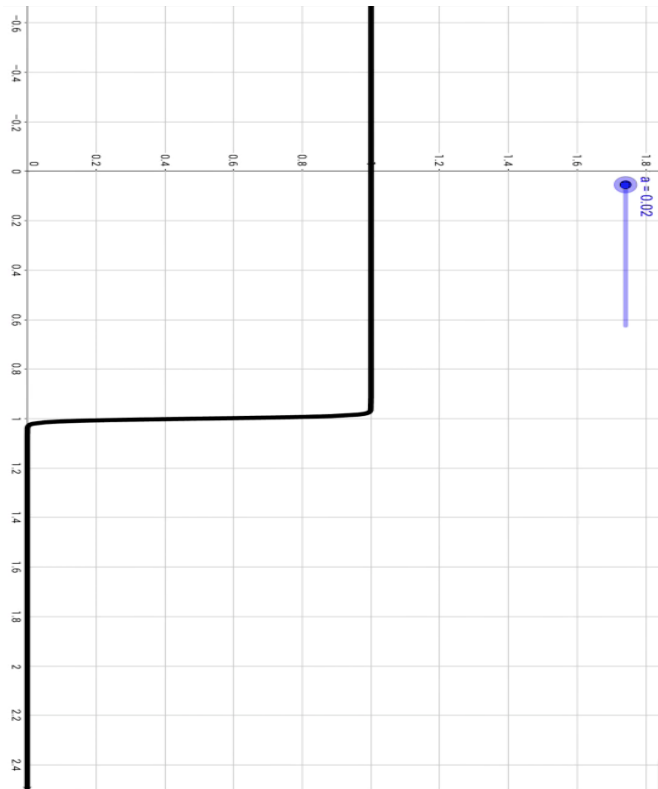
# 状態密度 × 分布関数：電子

 $f_n(E)$ 


$$n(E) = \int_{E_c}^{E_n} D(E) \times f(E) = dE$$

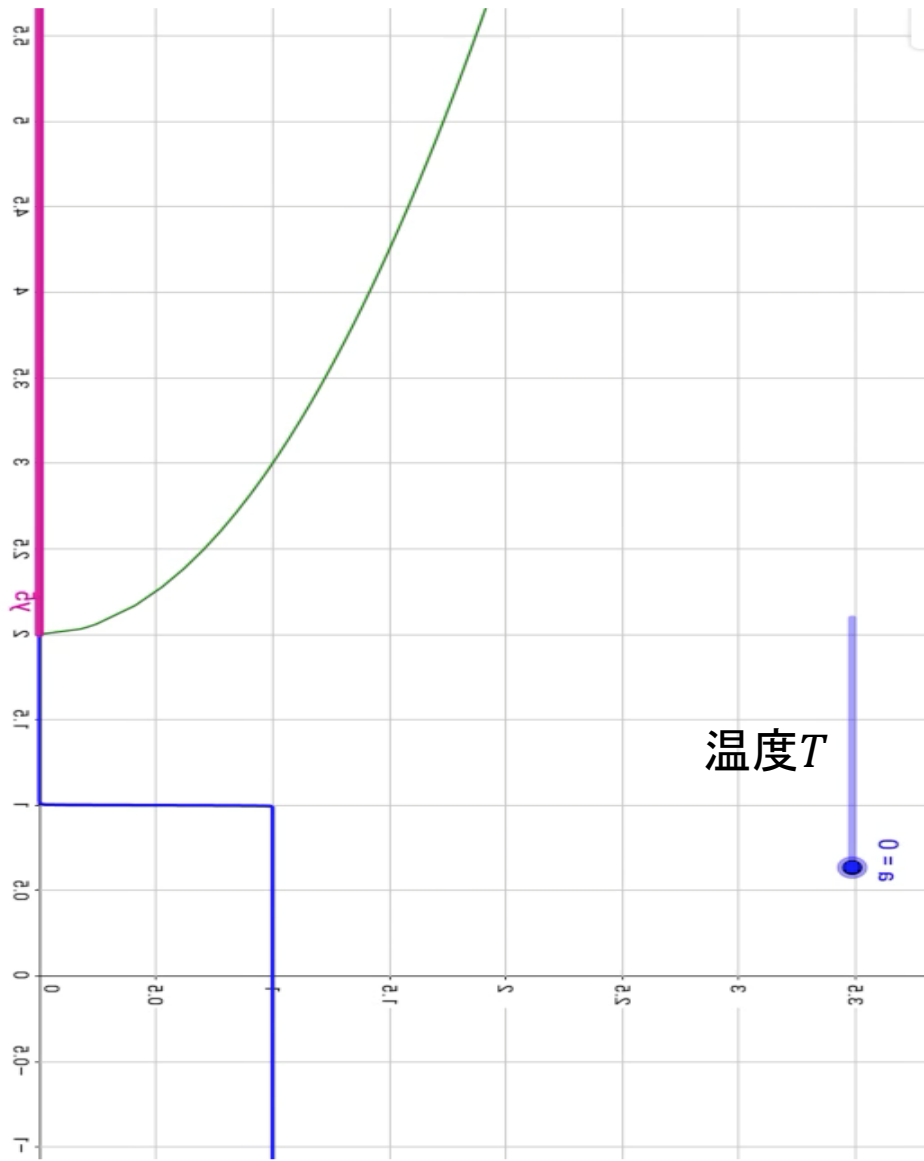
# 状態密度 × 分布関数: ホール

$$f_p(E) = 1 - f_n(E)$$

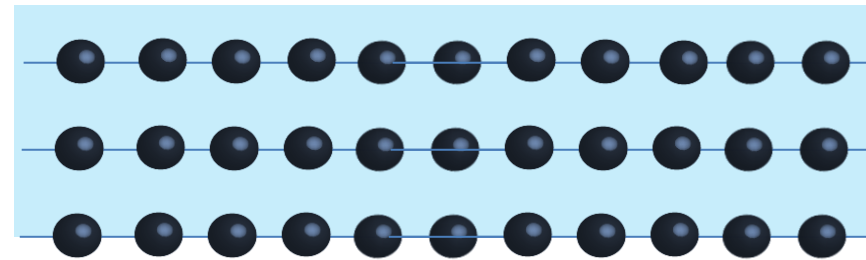


$$p(E) = \int_{E_1}^{E_n} D(E) \times f_p(E) = dE$$

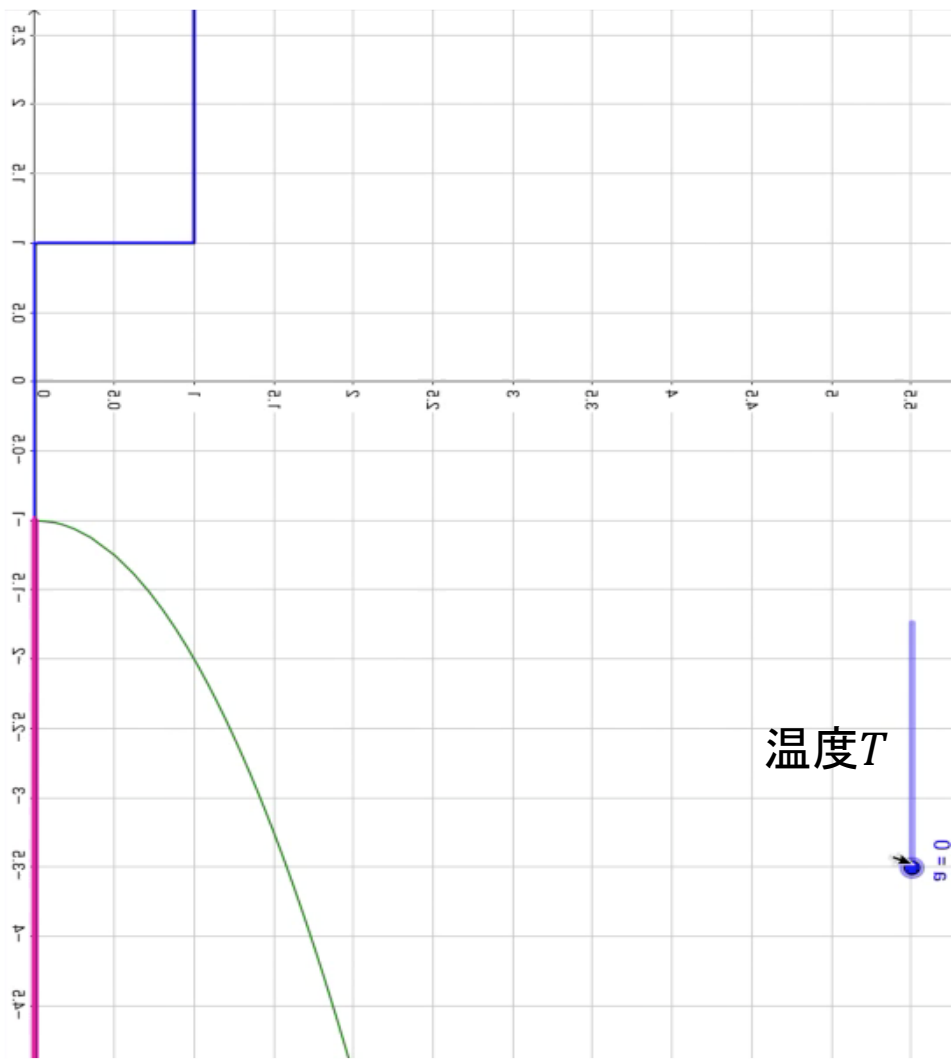
# 状態密度 $\times$ 分布関数 $D(E) \times f(E) ::$ 真性半導体 $\rightarrow$ 電子



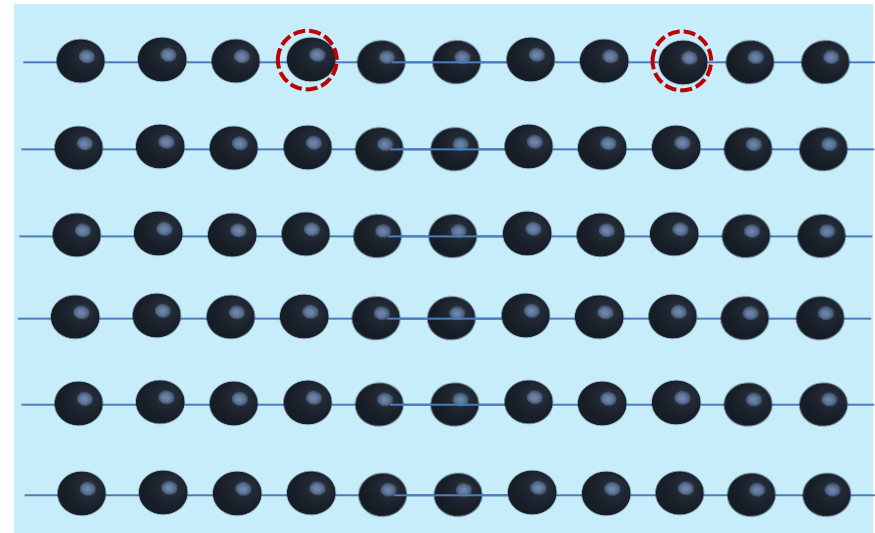
熱励起



# 状態密度 × 分布関数 $D(E) \times f(E)$ : 真性半導体 → ホール



## 熱励起

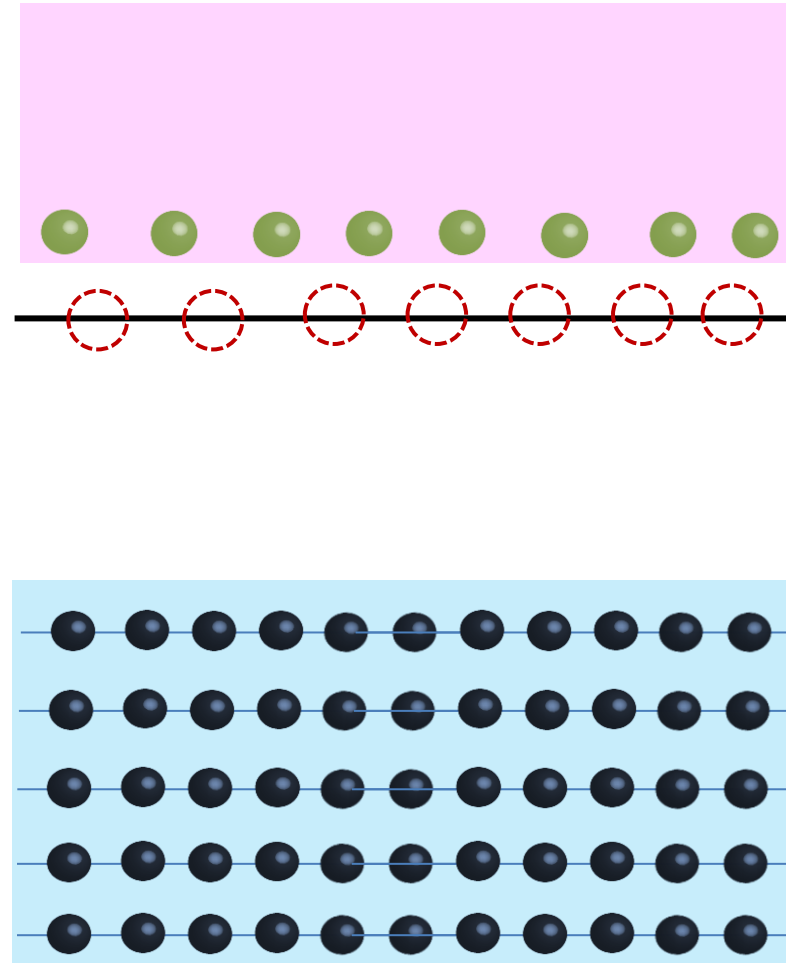
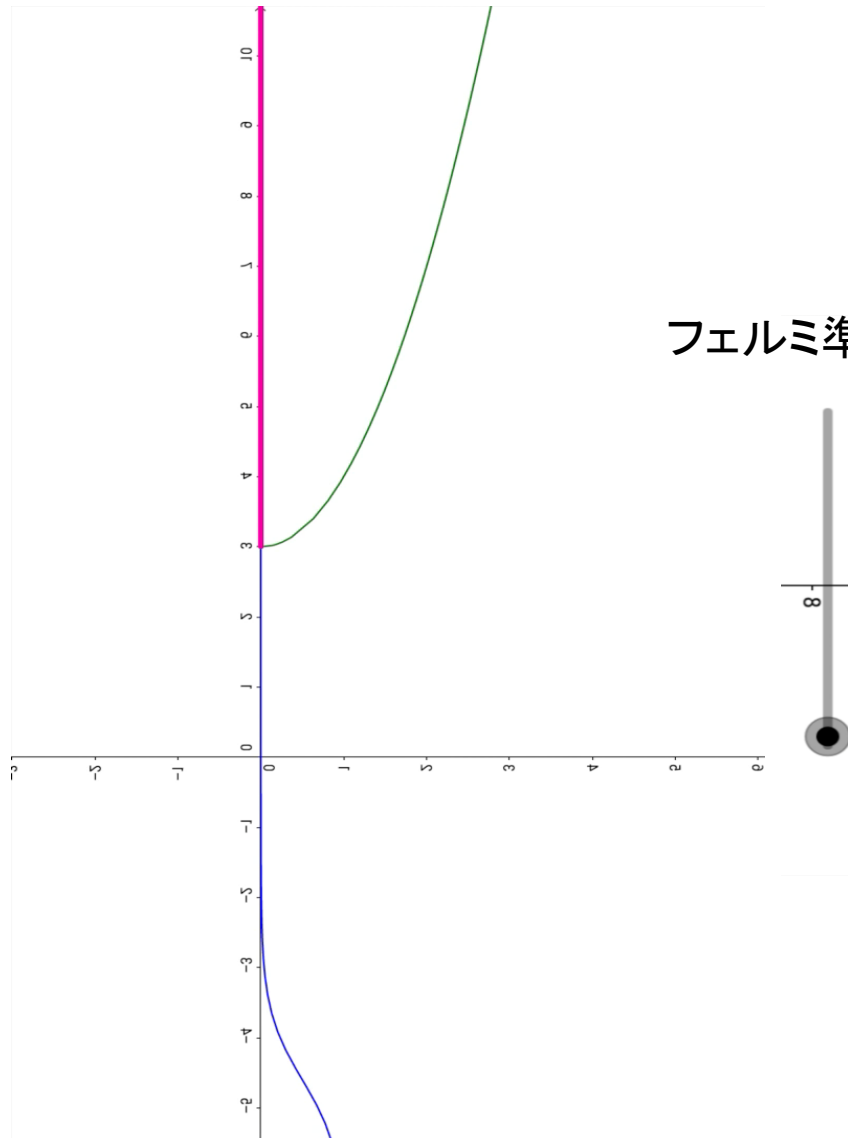




# 状態密度 × 分布関数 $D(E) \times f(E)$ : N型半導体

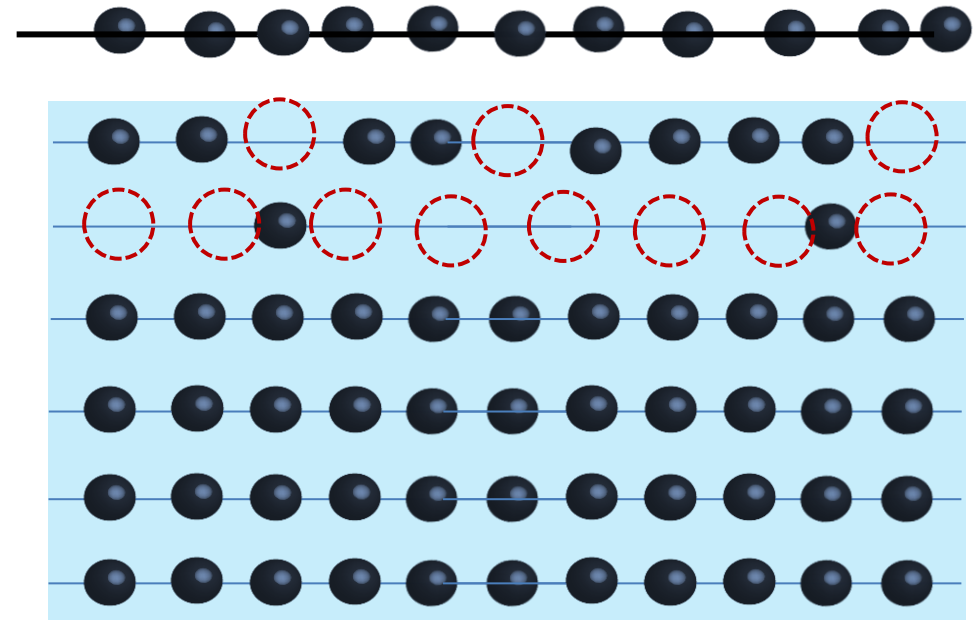
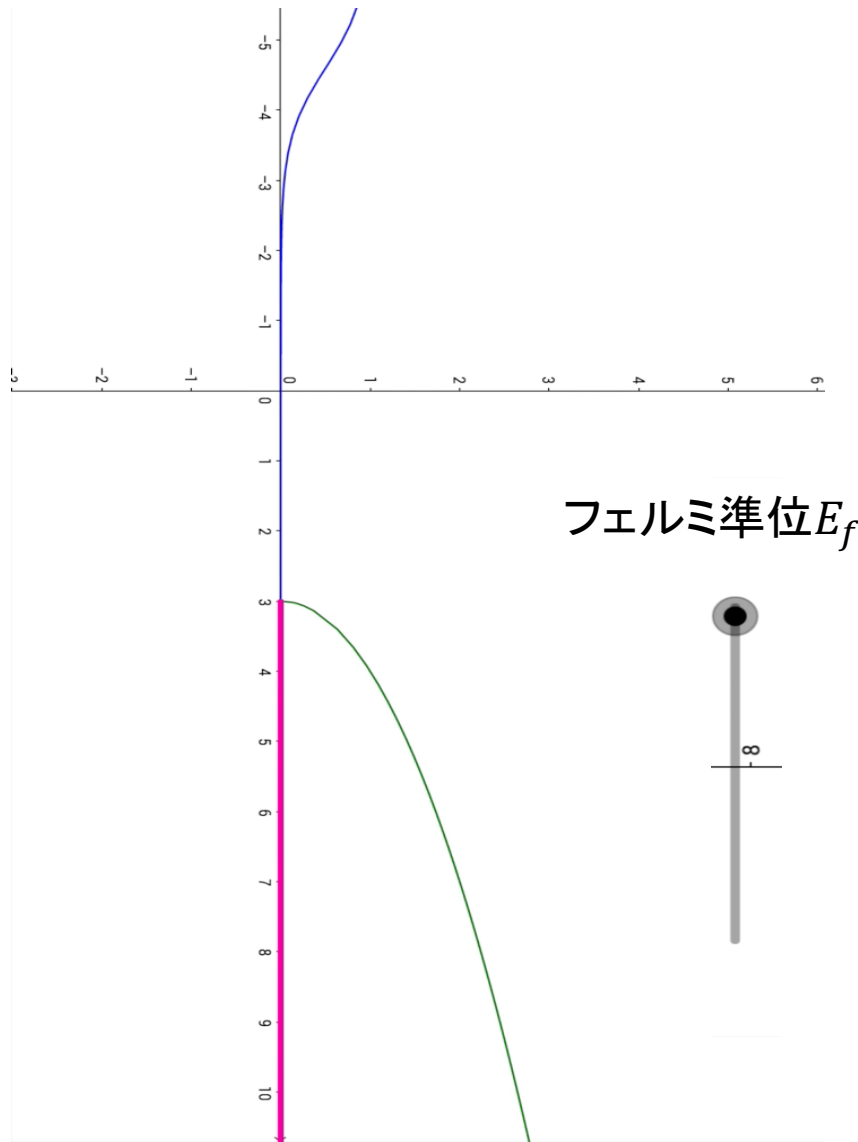
$$kT = 0.025(300K)$$

温度を300Kに固定する

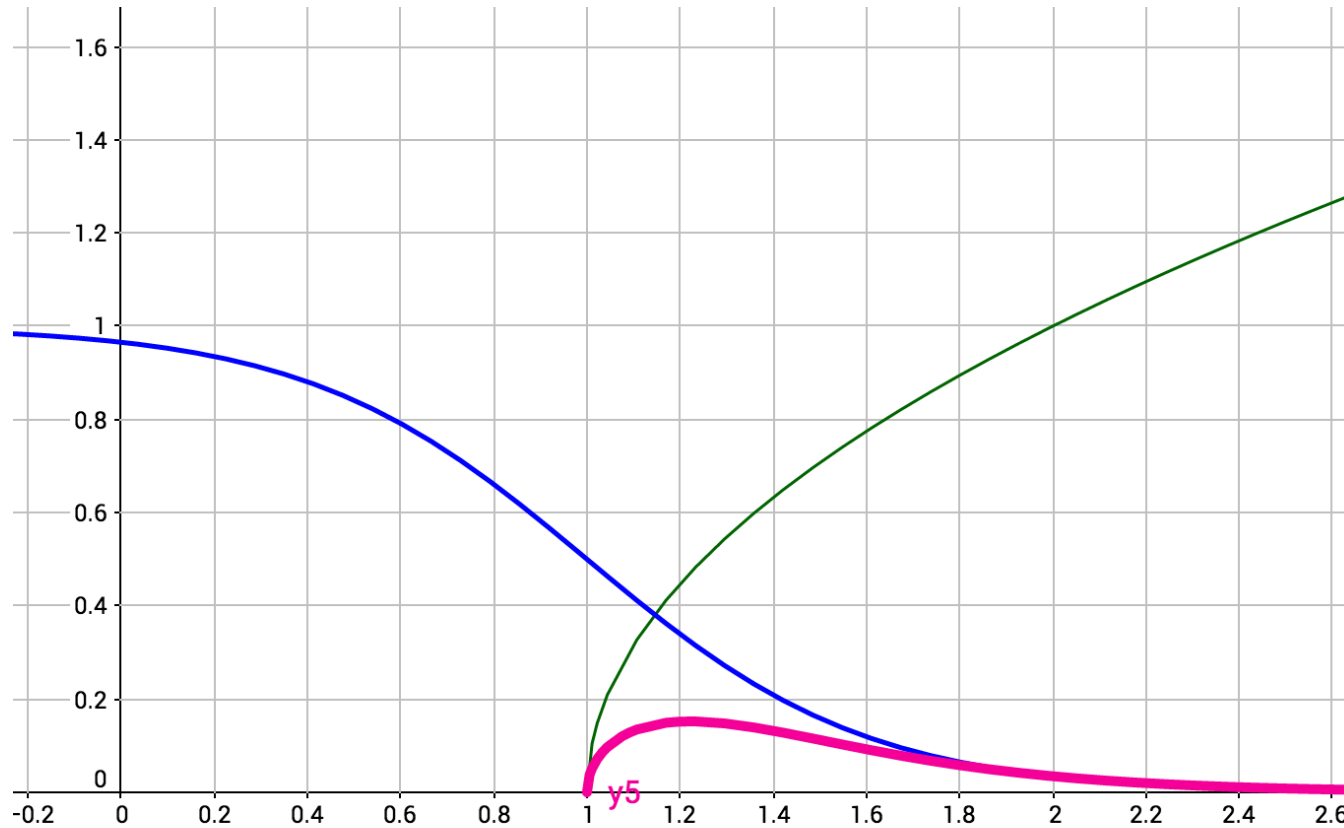


# 状態密度 × 分布関数 $D(E) \times f(E)$ : P型半導体

温度を300Kに固定する



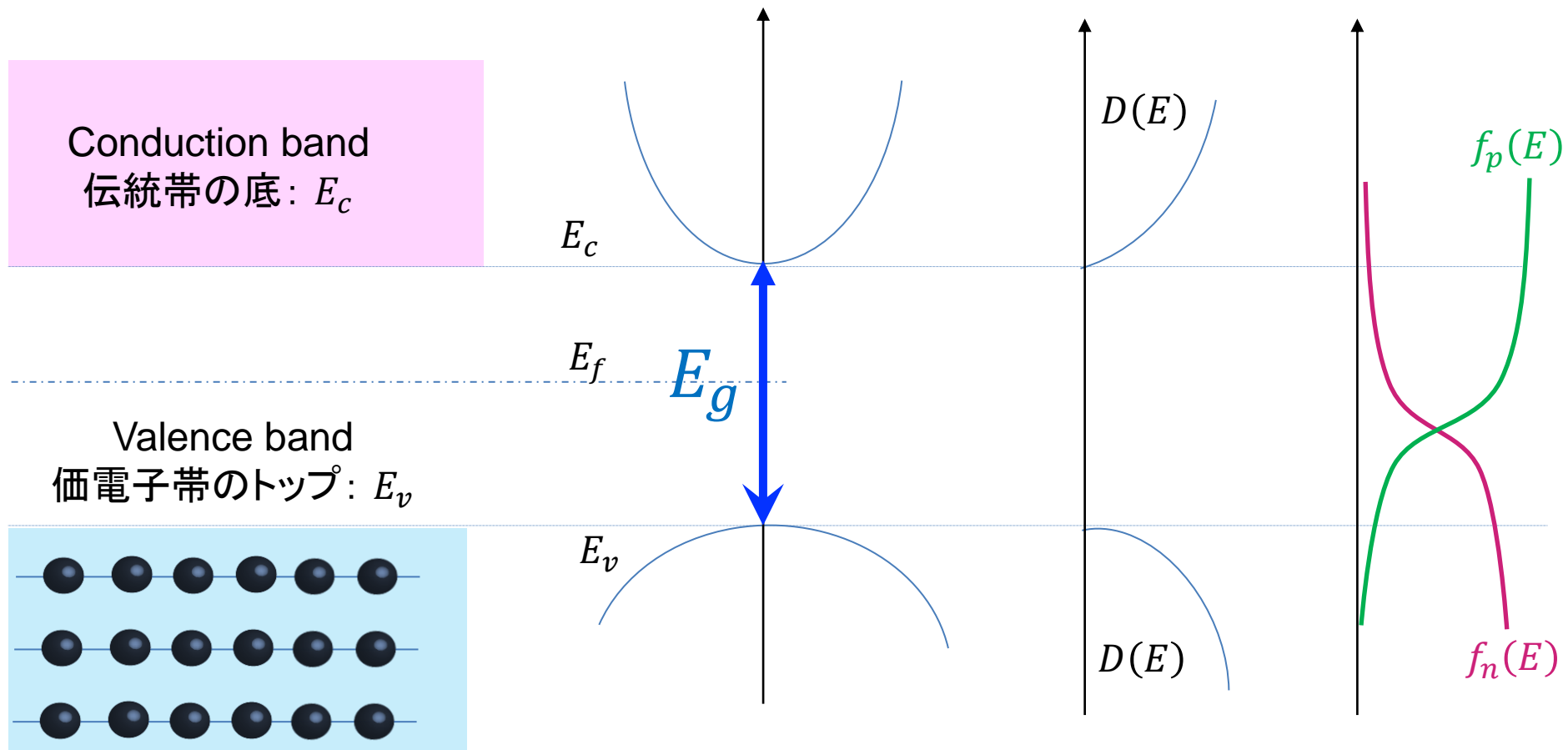
# キャリア密度の積分計算:



$$n(E) = \int_{E_1}^{E_n} D(E) \times f(E) dE$$

# キャリア密度の積分計算：符号の定義

$$n(E) = \int_{E_c}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{8\pi^2 m^*}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (E - E_c)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_f}{kT}\right) + 1} dE$$



# 電子密度の計算:

$$n = \int_{E_c}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{8\pi^2 m_e^*}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (E - E_c)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_f}{kT}\right) + 1} dE$$

Fermi-Diracの分布  $\rightarrow$  Boltzmann 分布

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_f}{kT}\right) + 1} = \exp\left(-\frac{E - E_f}{kT}\right)$$

$$\exp\left(-\frac{E - E_f}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{E - E_c + E_c - E_f}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{E - E_c}{kT}\right) \exp\left(-\frac{E_c - E_f}{kT}\right)$$

$$\exp\left(-\frac{E - E_f}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{E - E_c}{kT}\right) \exp\left(\frac{E_f - E_c}{kT}\right)$$

# 電子密度の計算:

$$n = \int_{E_c}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{8\pi^2 m_e^*}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (E - E_c)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{E - E_c}{kT}\right) \exp\left(\frac{E_f - E_c}{kT}\right) dE$$

$$n = \int_{E_c}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{8\pi^2 m_e^*}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (E - E_c)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{E - E_c}{kT}\right) dE * \exp\left(\frac{E_f - E_c}{kT}\right)$$

$$n = 2 \left( \frac{2\pi m_e^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} * \exp\left(\frac{E_f - E_c}{kT}\right)$$

$$n = N_c * \exp\left(\frac{E_f - E_c}{kT}\right)$$

伝導帯の有効状態密度 $N_c$ :

$$N_c = 2 \left( \frac{2\pi m_e^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

シリコンの場合:

$$N_c = 6.2 \times 10^{15} \cdot T^{\frac{3}{2}} [cm^{-3}]$$

$$N_c = 3.2 \times 10^{19} [cm^{-3}]: \text{室温} 300 [K]$$

$$n = 3.2 \times 10^{19} \exp\left(\frac{E_f - E_c}{kT}\right)$$

# 有効状態密度 $N_c$ とキャリア濃度の関係:

$$n(E) = N_c \exp\left(\frac{E_f - E_c}{kT}\right)$$

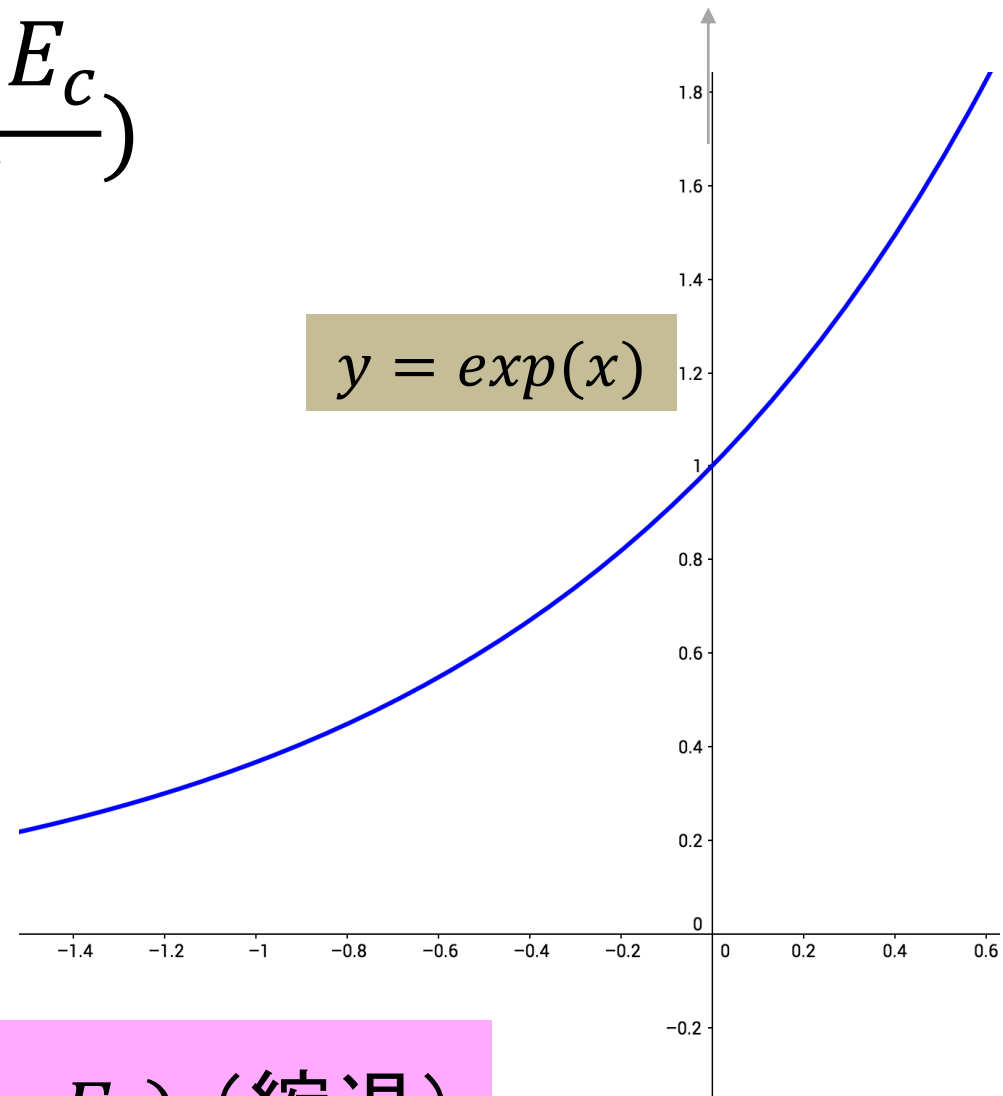
$$E_f - E_c \leq 0$$

$$\exp\left(\frac{E_f - E_c}{kT}\right) : 0 \sim 1$$

考慮しない

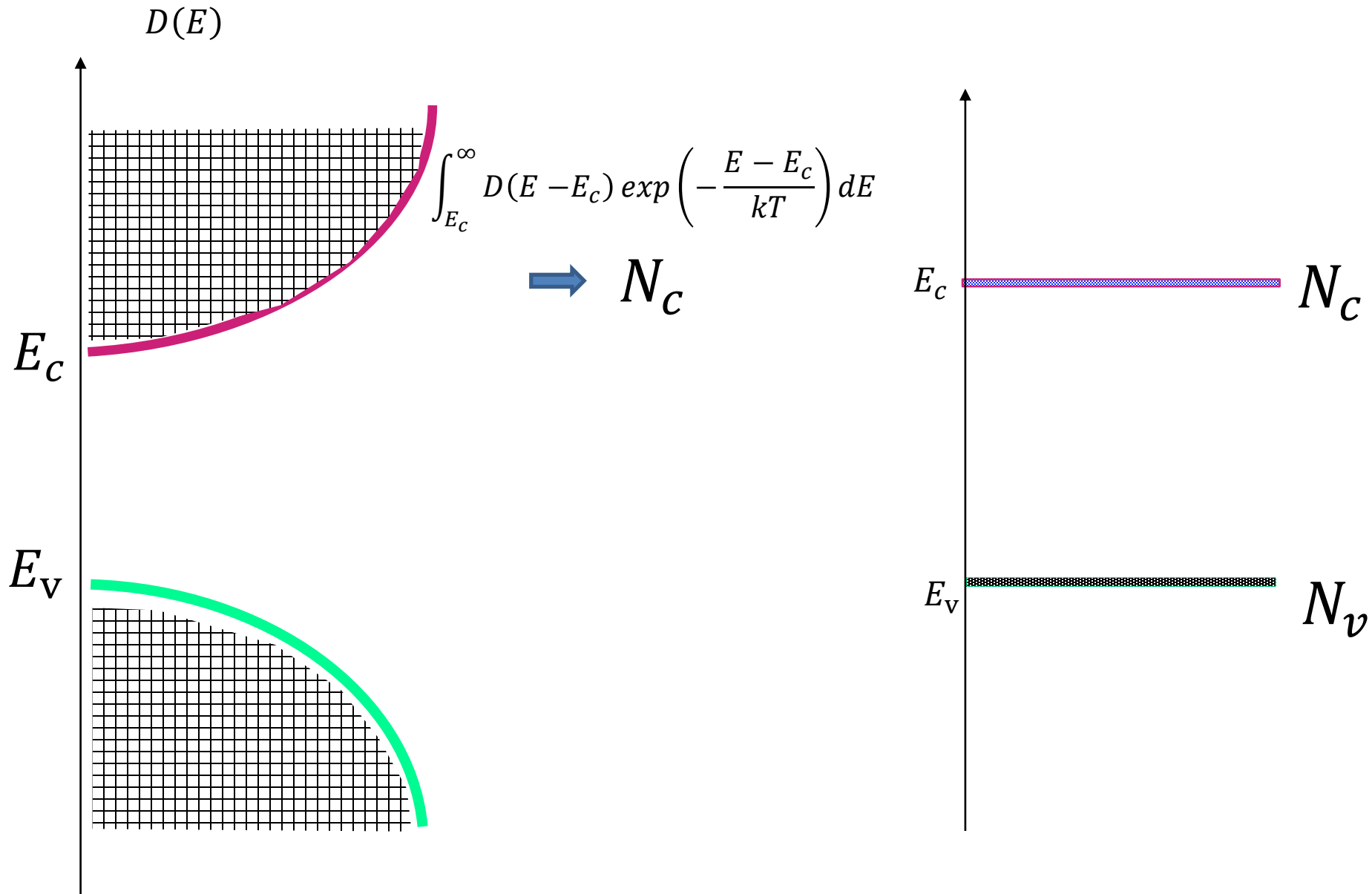
$$E_f - E_c > 0$$

$$\exp\left(\frac{E_f - E_c}{kT}\right) \propto \infty \quad (E_f > E_c) \quad (\text{縮退})$$

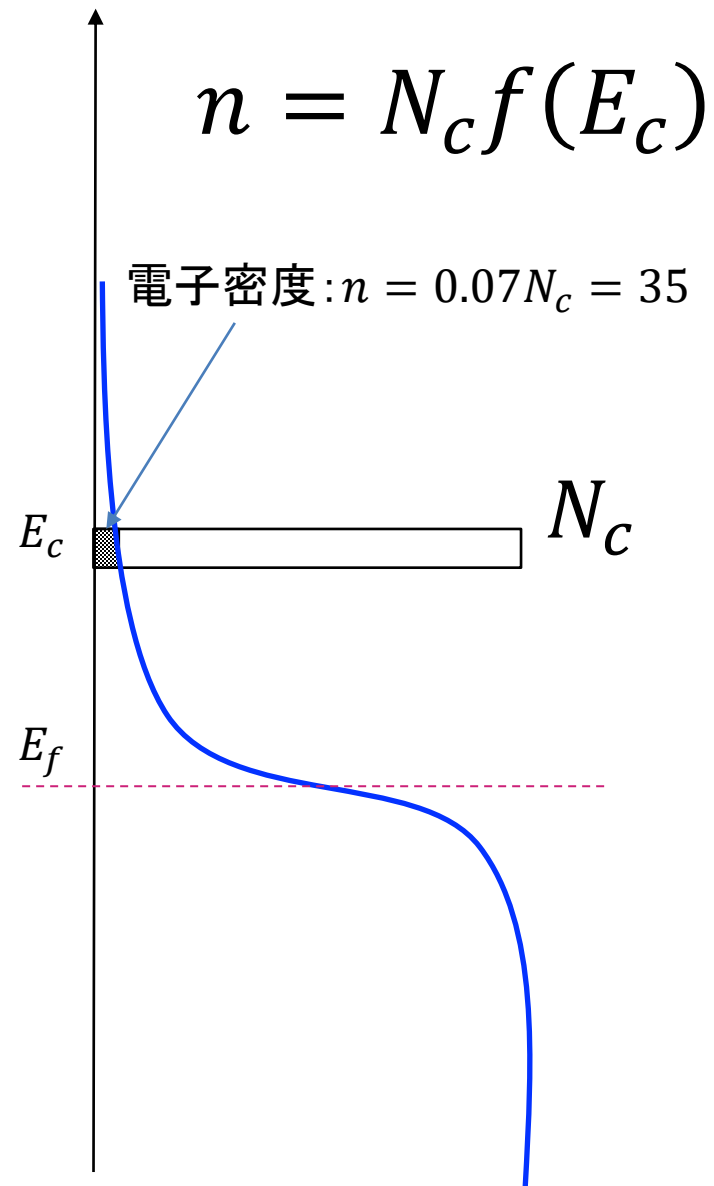
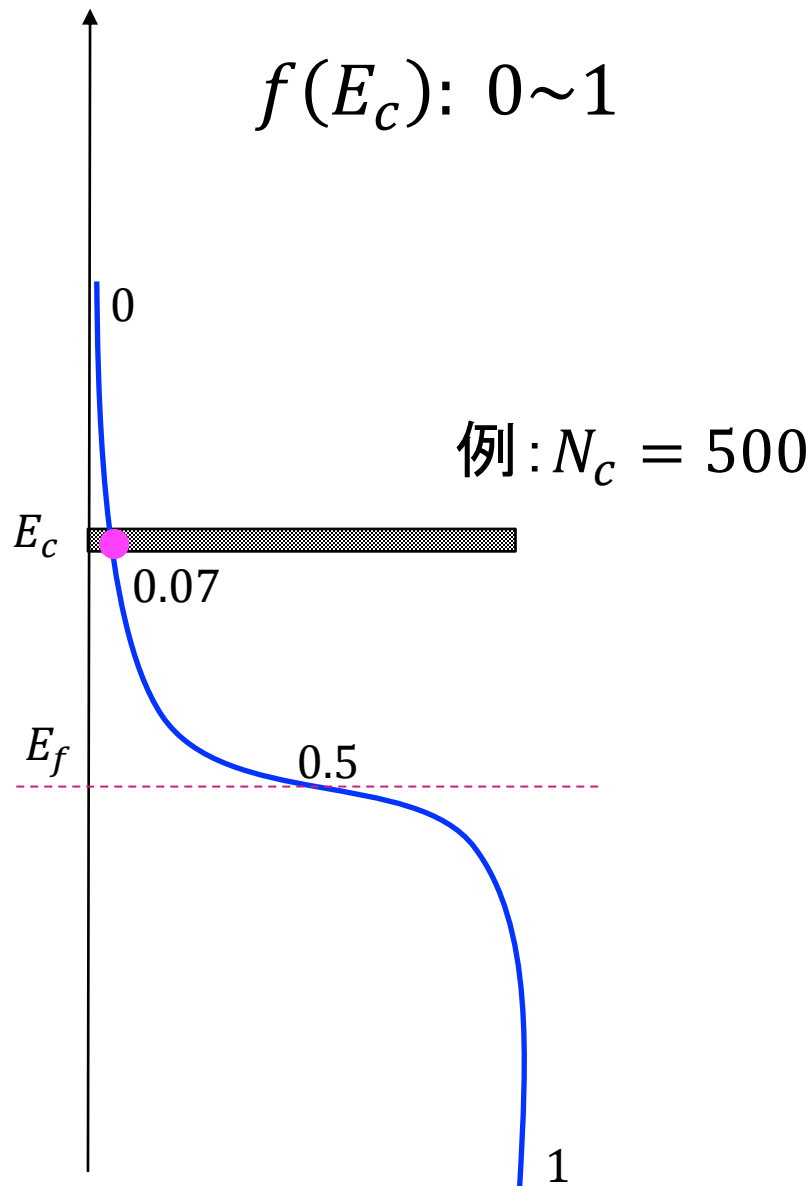




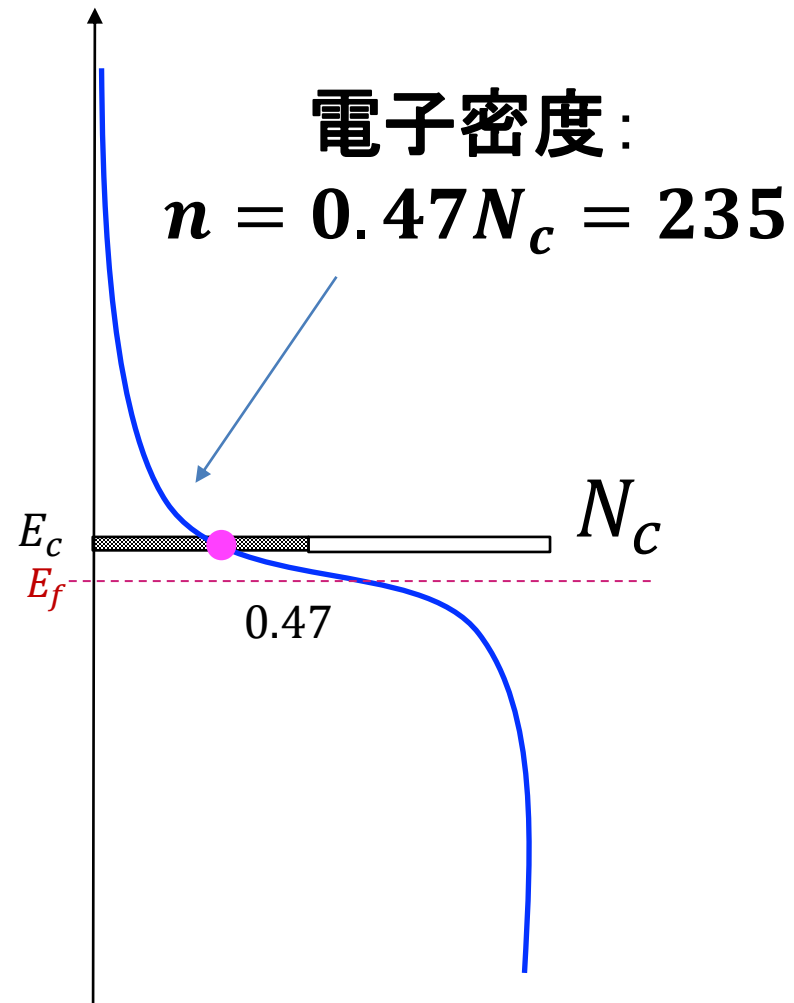
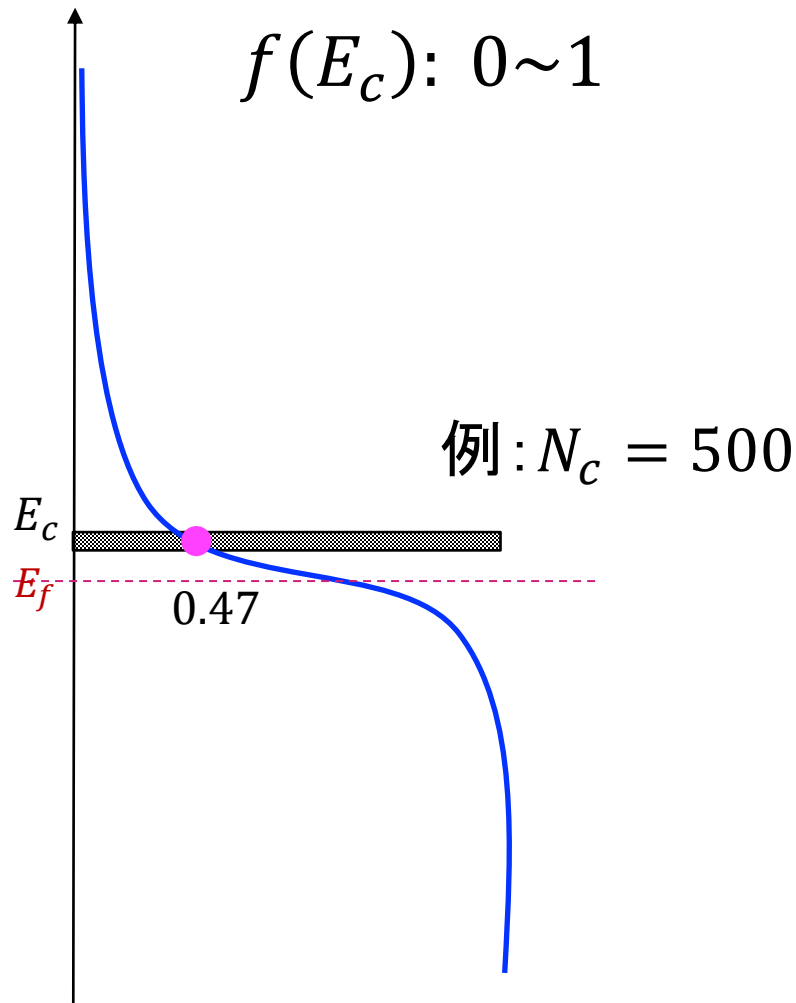
# 有効状態密度 $N_C$ と状態密度の関係:



# 電子密度計算プロセスの描像: $N_c f(E_c)$

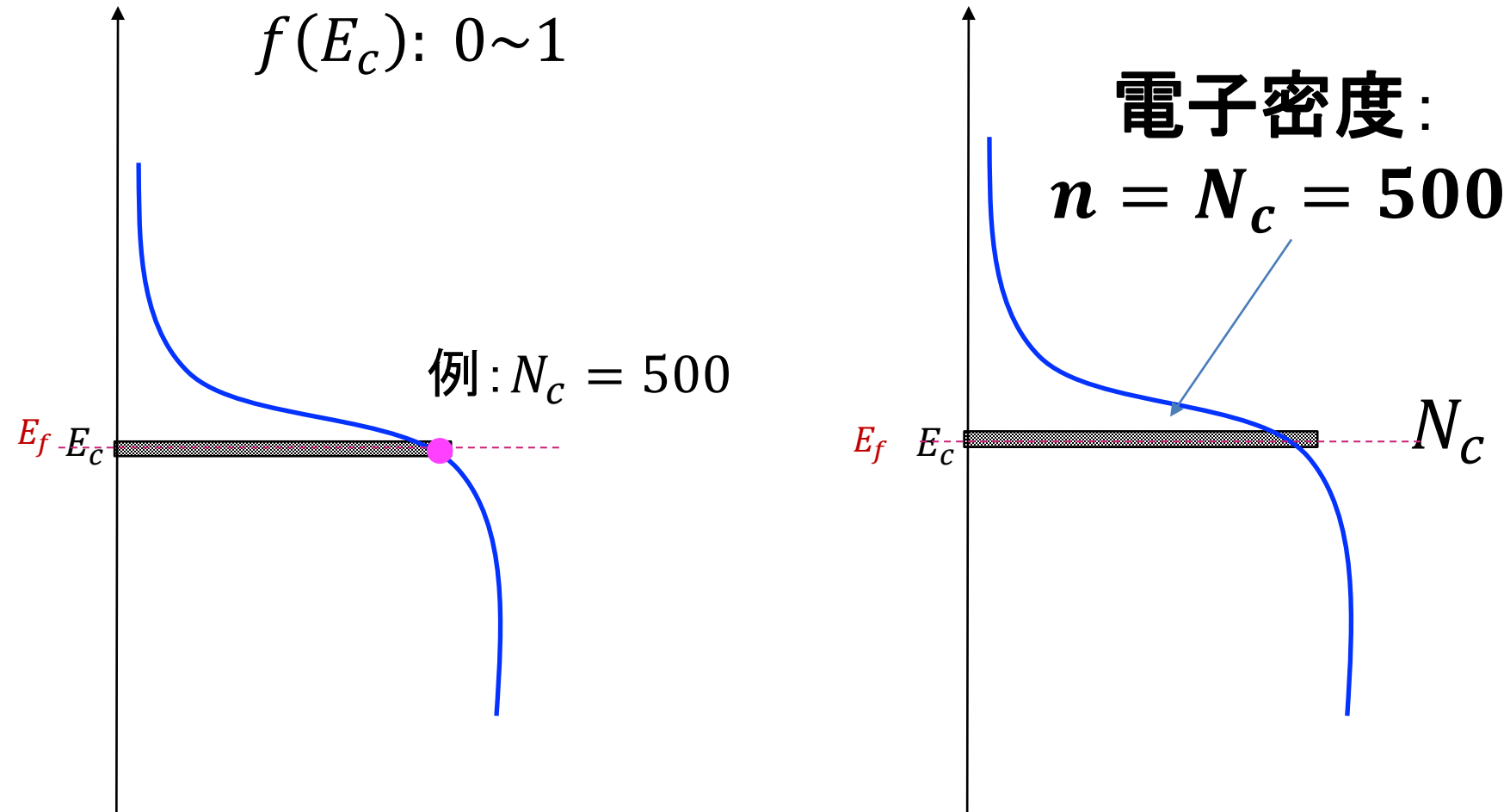


# 電子密度計算プロセスの描像: $N_c f(E_c)$



$f(E_c)$ :  $E_c$ が固定なので、電子濃度を調整するのはフェルミ準位になる。  
逆に、電子濃度がわかるとフェルミ準位がどこにあるかわかる。

# 電子密度計算プロセスの描像: $N_c f(E_c)$



$f(E_c)$ :  $E_c$ が固定なので、フェルミ準位が $E_c$ と等しくなると、  
電子濃度が有効状態密度 $N_c$ と等しくなる

# 電子密度計算例:

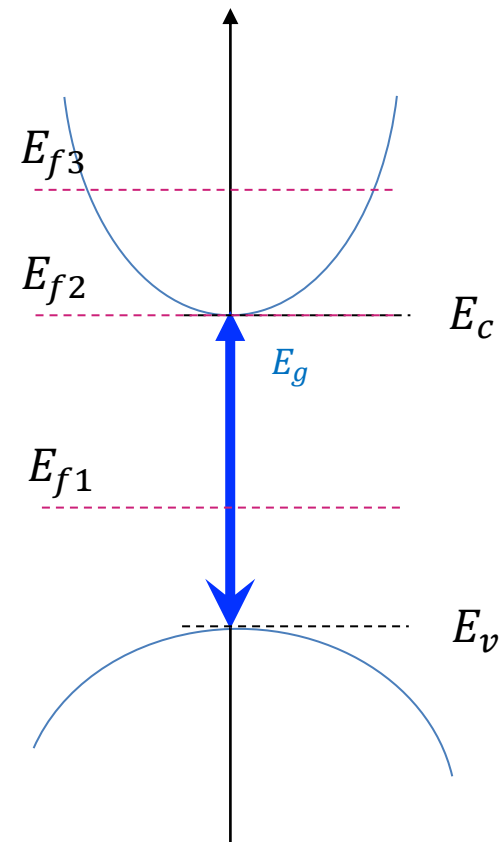
$$n = N_c \exp\left(\frac{E_f - E_c}{kT}\right)$$

$$n = 3.2 \times 10^{19} \exp[(E_f - E_c) * 40]$$

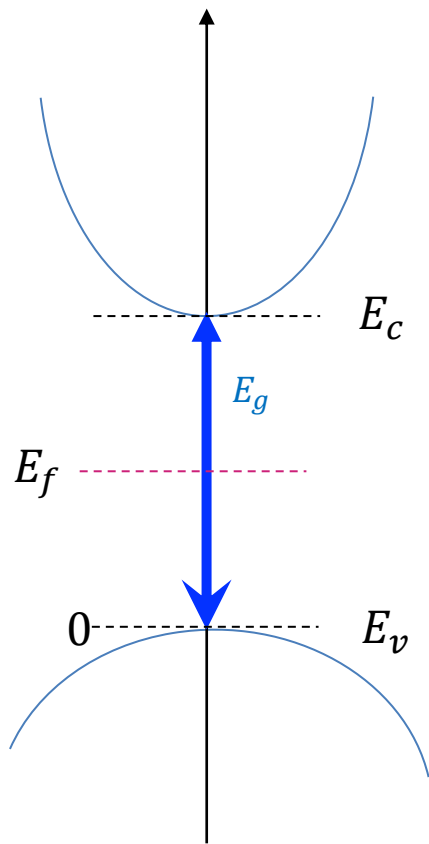
$$E_{f3} - E_c > 0 \quad n > 3.2 \times 10^{19} \text{ (縮退)}$$

$$E_{f2} - E_c = 0 \quad n = 3.2 \times 10^{19}$$

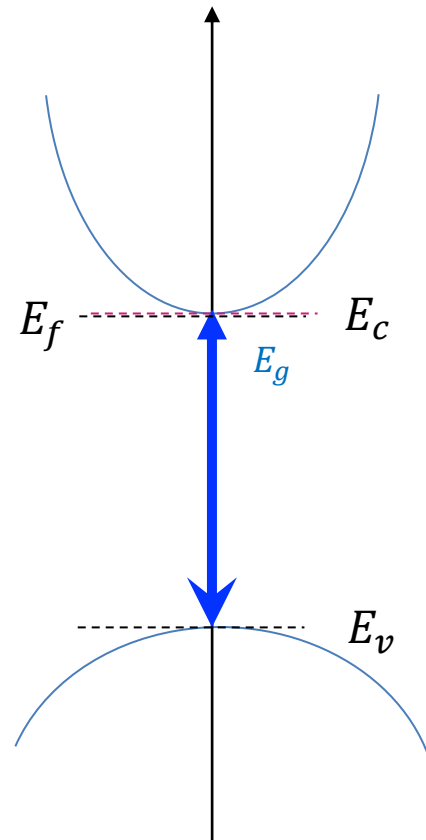
$$E_{f1} - E_c < 0 \quad n < 3.2 \times 10^{19}$$



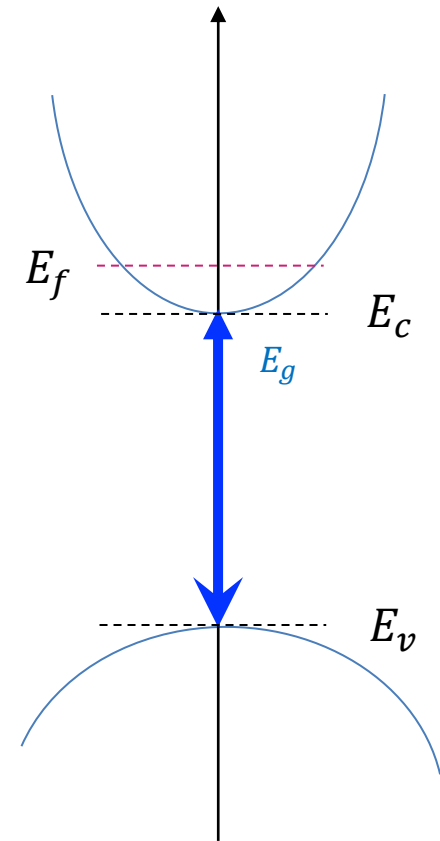
# フェルミ準位とキャリア濃度の計算例:



$$n < N_c$$



$$n = N_c$$



$n > N_c$  (縮退)  
考慮しない

# ホール密度の計算:

$$p = \int_{-\infty}^{E_V} \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{8\pi^2 m_h^*}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (E_V - E)^{\frac{1}{2}} \times \left\{ 1 - \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_f}{kT}\right) + 1} \right\} dE$$

ホールの分布関数  $f_p$  :  $1 - f_n$

Fermi-Diracの分布  $\rightarrow$  Boltzmann 分布

$$p = N_V \exp\left(-\frac{E_V - E_f}{kT}\right)$$

$$N_V = 2 \left( \frac{2\pi m_h^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

# 価電子帯の有効状態密度 $N_V$ :

$$N_V = 2 \left( \frac{2\pi m_h^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

シリコンの場合:

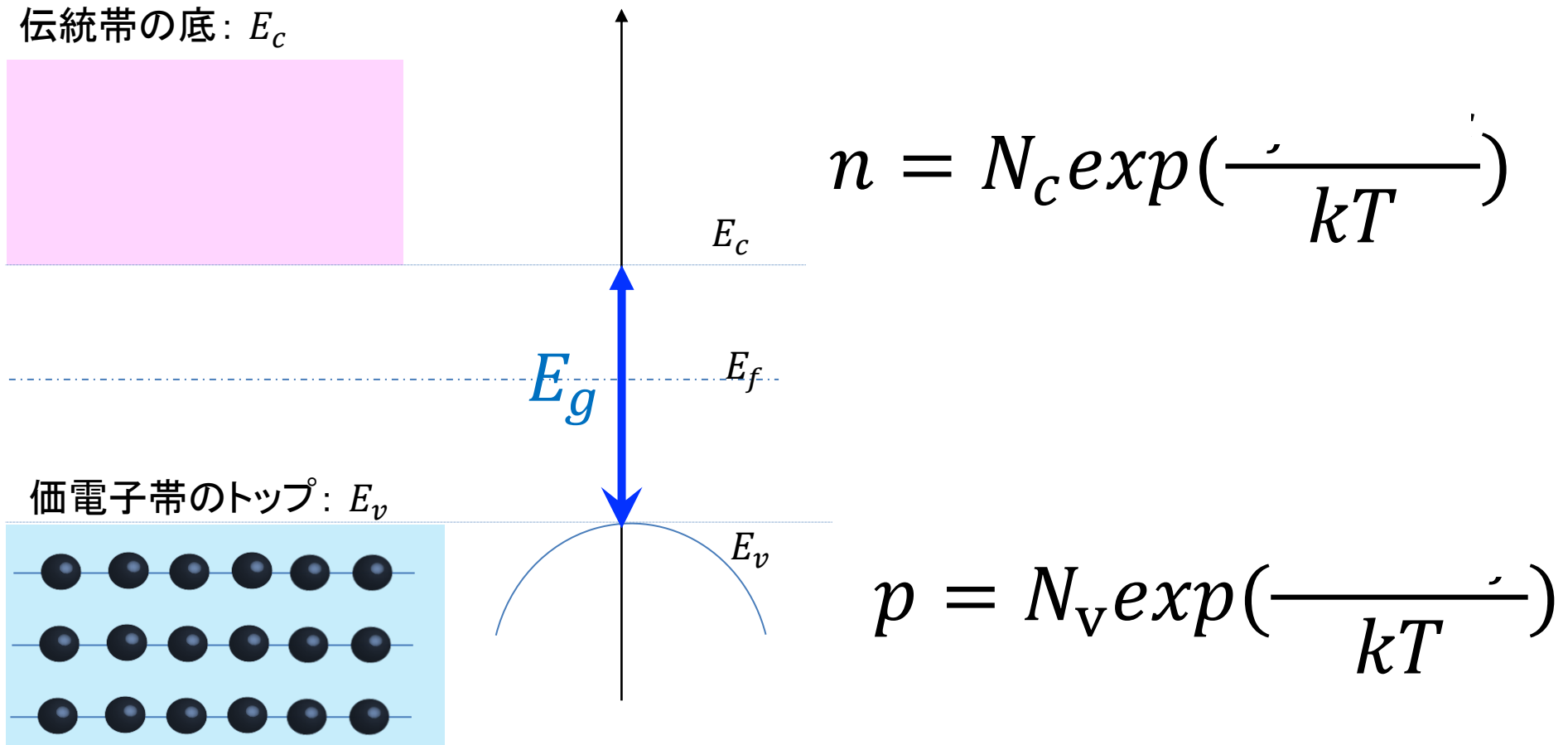
$$N_V = 3.5 \times 10^{15} \cdot T^{\frac{3}{2}} [cm^{-3}]$$

$$N_V = 1.82 \times 10^{19} [cm^{-3}]: \text{室温} \\ 300[K]$$

$$p = 1.82 \times 10^{19} \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right)$$



# 不純物添加無し我真性半導体の電子とホール密度



真性半導体  $n = p$

# 熱平衡と非熱平衡とフェルミ準位:

熱平衡: 光照射なし、バイアス電圧なし、温度効果だけを考慮する。

真性半導体・P型半導体とN型半導体において:

$$E_{fn} = E_{fp} = E_f$$

熱平衡ではない時:

光照射あり: 太陽電池、

バイアス電圧あり: 太陽電池、LED。

真性半導体においては:

$$E_{fn} = E_{fp} = E_f$$

P型半導体とN型半導体においては:

$$E_{fn} \neq E_{fp} \neq E_f$$

# 真性半導体のフェルミ準位:

真性半導体  $n = p$   $\frac{n}{p} = 1$

$$\frac{N_c \exp\left(\frac{E_f - E_c}{kT}\right)}{N_v \exp\left(\frac{E_v - E_f}{kT}\right)} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{N_c \exp\left(\frac{2E_f - E_c - E_v}{kT}\right)}{N_v} = 1$$

$$\exp\left(\frac{2E_f - E_c - E_v}{kT}\right) = \frac{N_v}{N_c}$$

# 真性半導体のフェルミ準位:

$$\frac{2E_f - E_c - E_v}{kT} = \ln \frac{N_v}{N_c}$$

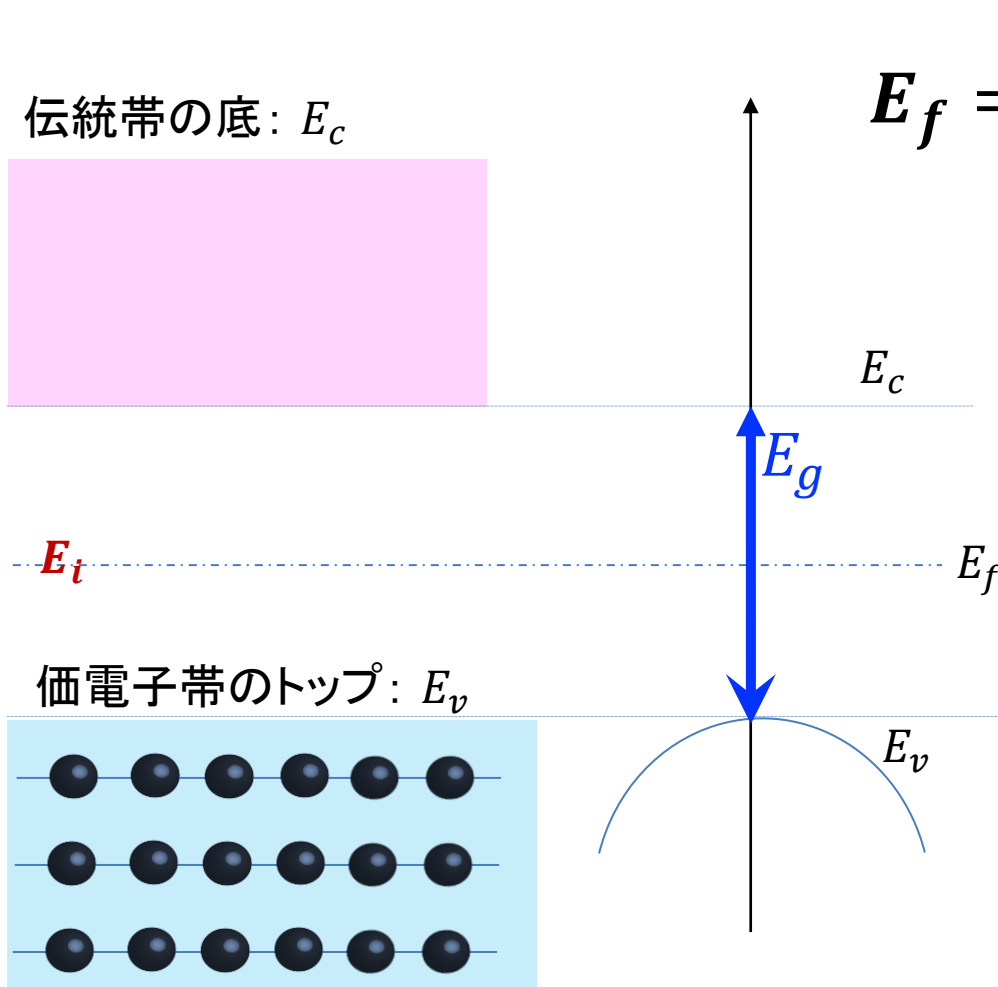


$$2E_f = E_c + E_v + kT \ln \frac{N_v}{N_c}$$



$$E_f = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{1}{2} kT \ln \frac{N_v}{N_c}$$

# 真性半導体のフェルミ準位と禁制帯の中心準位との関係:



$$E_f = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{1}{2} kT \ln \frac{N_v}{N_c}$$

$E_i$ : 禁制帯の中心準位

$$E_f = E_i + \frac{1}{2} kT \ln \frac{N_v}{N_c}$$

$$\frac{N_v}{N_c} \approx 1$$

$$E_f \approx E_i = \frac{E_c + E_v}{2}$$

# 熱平衡時真性半導体の $pn$ 積

$$n = N_c \exp\left(\frac{E_f - E_c}{kT}\right)$$



$$p = N_v \exp\left(\frac{E_v - E_f}{kT}\right)$$



$$pn = N_c N_v \exp\left(\frac{E_v - E_c}{kT}\right)$$

# 真性半導体の真性キャリア密度 $n_i$ :

$$pn = N_c N_v \exp\left(\frac{E_v - E_c}{kT}\right)$$

$$pn = N_c N_v \exp\left(\frac{-E_g}{kT}\right) \leftarrow \text{定数 } n_i^2$$

## シリコンの真性キャリア密度 $n_i$ :

$$n_i^2 = N_c N_v \exp\left(\frac{E_v - E_c}{kT}\right) = N_c N_v \exp\left(\frac{-E_g}{kT}\right)$$

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(\frac{E_v - E_c}{2kT}\right) = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(\frac{-E_g}{2kT}\right)$$

# 真性半導体の真性キャリア密度:

$$n_i^2 = N_c N_v \exp\left(\frac{-E_g}{kT}\right)$$

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(\frac{-E_g}{2kT}\right)$$

$$N_c = 3.2 \times 10^{19}, \quad N_v = 1.8 \times 10^{19}, \quad E_g = 1.1[\text{eV}], \\ kT = 0.025[\text{eV}],$$

$$n_i^2 = 1.82 \times 3.2 \times 10^{38} \times 7.78 \times 10^{-20} \approx 1 \times 10^{20}$$

$$n_i \approx 1 \times 10^{10} [\text{cm}^{-3}]$$



# 真性半導体の真性キャリア密度:

$$pn = n_i^2$$

真性半導体  
N型半導体  
P型半導体 } 成立

真性半導体

$$n = p$$

$$n = p = n_i$$

N型半導体 P型半導体

$$n \neq p$$

$$n \neq p \neq n_i$$